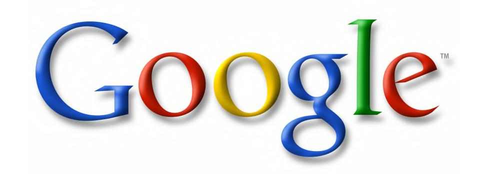
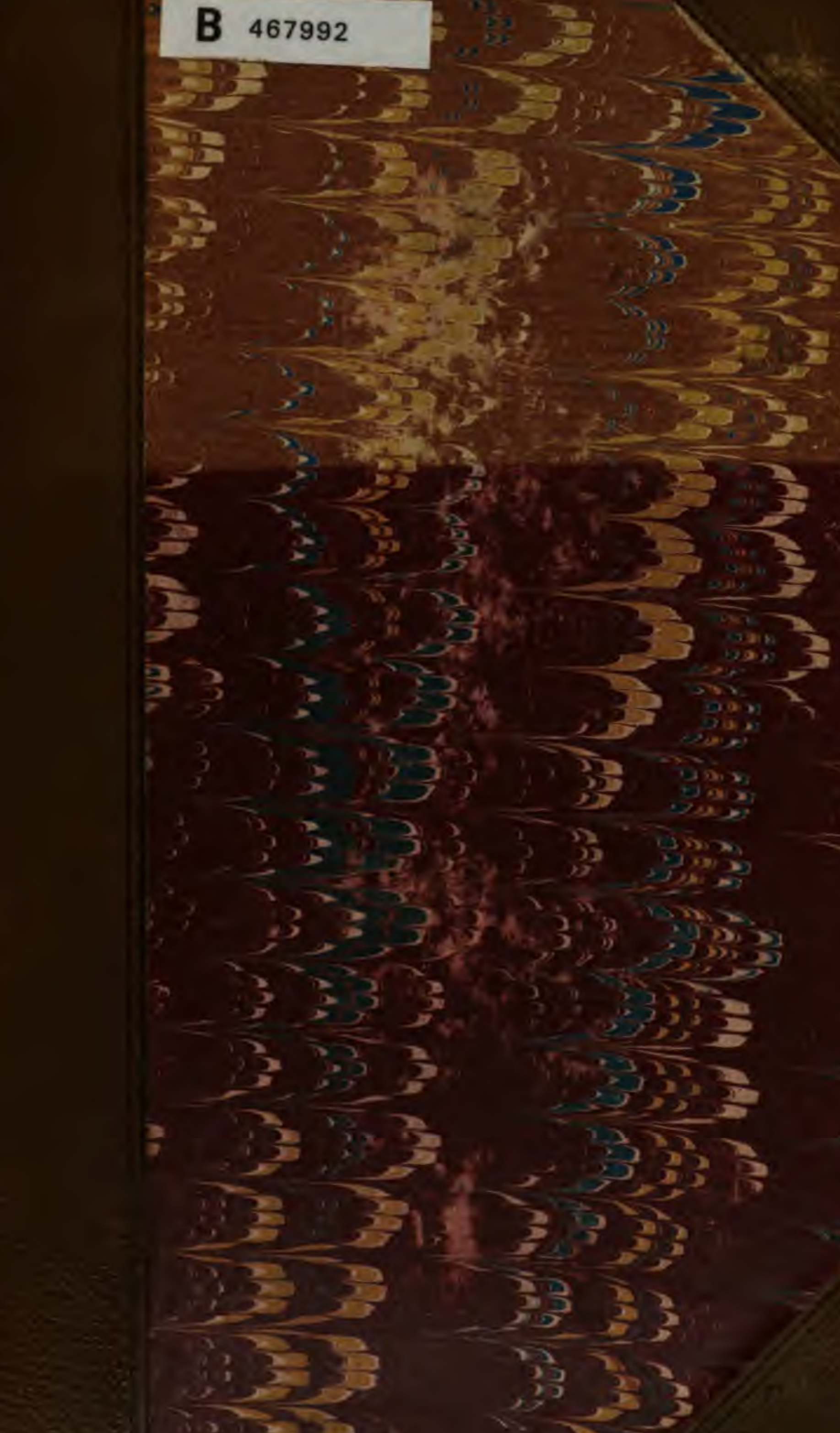
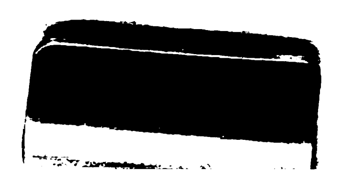






NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1863.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.

ET

PROUHET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DEUXIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM.

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,
Quai des Augustins, n° 55.

1863.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1862);

SOLUTION DE M. GAËTANO DE LYS.

Trouver le lieu des centres des surfaces représentées par l'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2pxz + 2qyz - 2ax - 2by + 2cz = 0$$

(*a, b, c étant des nombres positifs donnés, p et q des paramètres variables*) : 1° *lorsque p et q varient de toutes les manières possibles*; 2° *lorsque p et q varient de manière à ce que l'équation représente un cône. Distinguer la partie du lieu qui correspond à des hyperboloïdes à une nappe de celle qui correspond à des hyperboloïdes à deux nappes.*

Si l'on rapporte la surface à son centre, l'équation prend la forme

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2pxz + 2qyz - ax' - by' + cz' = 0,$$

(x', y', z') désignant les coordonnées du centre. Sous cette forme, qui se ramène facilement à la suivante :

$$(x + pz)^2 + (y + qz)^2 - (p^2 + q^2 + 1)z^2 - ax' - by' + cz' = 0,$$

on reconnaît que l'équation représente généralement des hyperboloïdes à une ou deux nappes suivant le signe de la quantité

$$ax' + by' - cz',$$

savoir :

$ax' + by' - cz' > 0$.... Hyperboloïde à une nappe.
$ax' + by' - cz' < 0$.... Hyperboloïde à deux nappes.
$ax' + by' - cz' = 0$.... Cônes.

Le lieu des centres dans les deux premiers cas s'obtient facilement par l'élimination de p et q entre les trois équations qui déterminent le centre

(1) $$x' + pz' - a = 0,$$
(2) $$y' + qz' - b = 0,$$
(3) $$px' + qy' - z' + c = 0.$$

L'élimination donne

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - ax' - by' - cz' = 0,$$

équation d'une sphère dont le centre est au point $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ et dont le rayon est $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}}$.

2° Lorsque p et q varient de manière à ce que l'équation représente un cône, le lieu des sommets des cônes est déterminé par les deux équations

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - ax' - by' - cz' = 0,$$
$$ax' + by' - cz' = 0.$$

Le lieu est donc un cercle de la sphère déjà trouvée.

Le plan $ax' + by' - cz' = 0$ coupe la sphère en deux zones.

Celle qui est au-dessous du plan et pour laquelle on a

$$ax' + by' - cz' > 0,$$

est le lieu des centres des hyperboloïdes à une nappe.

La zone qui est au-dessus du plan et pour laquelle on a

$$ax' + by' - cz' < 0,$$

est le lieu des centres des hyperboloïdes à deux nappes.

Une remarque intéressante, c'est que l'un des paramètres p ou q étant supposé constant, on a l'équation générale des hyperboloïdes qui admettent pour sections planes communes une hyperbole équilatère et un cercle.

Note du Rédacteur. — Des solutions peu différentes nous sont parvenues en assez grand nombre; nous nous en tiendrons à la précédente, qui répond d'une manière simple et complète à la question proposée.

QUESTION PROPOSÉE EN COMPOSITION POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE (1862);

SOLUTION DE M. L. P,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Par les extrémités A, B *d'une corde* AB *d'une longueur constante et inscrite dans un cercle donné* O, *on mène des droites* AM, BM *respectivement parallèles à deux droites fixes; trouver le lieu de l'intersection* M *des deux droites* AM, BM.

Prenons pour axes des coordonnées OX, OY des parallèles aux directions fixes, menées par le centre O du cercle. Soient θ l'angle YOX des axes; θ_1 l'angle constant BOA; α l'angle variable AOX; P et Q les points où les droites BM, AM prolongées coupent les axes OX, OY; x, y les coordonnées MQ, MP du point M, et r le rayon du cercle.

Les triangles OAQ, BOP donnent

$$y = \frac{r}{\sin\theta}\sin\alpha, \quad x = \frac{r}{\sin\theta}\sin(\theta - \theta_1 - \alpha).$$

De ces deux équations, on tire

$$\sin\alpha = \frac{y.\sin\theta}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{\sin\theta}{r.\sin(\theta - \theta_1)}[x + y\cos(\theta - \theta_1)];$$

et en substituant dans $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, on obtient pour l'équation du lieu

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos(\theta - \theta_1) = \frac{r^2\sin^2(\theta - \theta_1)}{\sin^2\theta}.$$

On voit que le lieu est une ellipse rapportée à son centre. Si on avait $\theta = \theta_1$, le lieu serait la droite $(x + y) = 0$.

Ce cas particulier écarté, il est facile de voir que les axes de l'ellipse sont dirigés suivant les bissectrices des angles des axes; car l'équation obtenue reste la même, lorsqu'on change x en y et y en x, ou bien encore x en $-y$, et $-y$ en x.

On aura les longueurs des axes, en déterminant les points de rencontre de la courbe et des bissectrices des angles des coordonnées. On trouve, pour les longueurs des demi-axes,

$$\frac{r\sin\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \frac{r\cos\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

L'ellipse est ainsi déterminée de grandeur et de position.

QUESTION D'EXAMEN — ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1862);

SOLUTION DE M. ALFRED BRISSAUD,
Élève en spéciales (institution Loriol).

Conditions de convergence et somme des termes de la série :

$$1.2.3\ldots p x^p + 2.3\ldots p(p+1)x^{p+1} + 3.4.5\ldots(p+2)x^{p+2} + \ldots.$$

1° Le rapport de deux termes consécutifs est en général

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)(m+p+1)}{m(m+1)\ldots(m+p-1)(m+p)}x = \frac{m+p+1}{m}x;$$

sa limite est x; donc la condition de convergence est $x < 1$. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, $x < 1$.

2° Pour $p = 1$, la série convergente considérée devient

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots.$$

Désignons sa somme par xy, on aura

$$y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots.$$

Or, $1 + 2x + 3x^2 + \ldots$ est la dérivée de

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

donc y est la dérivée première de $\frac{1}{1-x}$.

En prenant les p dérivées successives de $\frac{1}{1-x}$, on trouve

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

$$= \textit{dérivée première de } \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-2},$$

$$1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + \ldots$$

$$= \textit{dérivée seconde de } \frac{1}{1-x} = 1.2(1-x)^{-3},$$

. . . .

$$1.2.3\ldots p + 2.3\ldots(p+1)x + \ldots = 1.2\ldots p(1-x)^{-(p+1)}.$$

Multipliant les deux membres de cette dernière égalité par x^p, le premier membre devient la série considérée, dont la somme est

$$\frac{1.2.3\ldots px^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

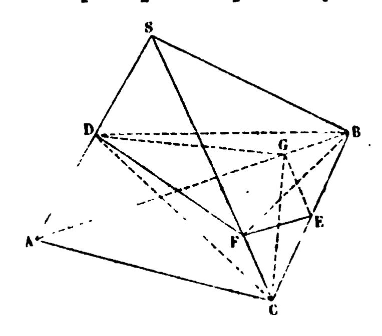
QUESTION D'EXAMEN — ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1862);

Solution de M. Georges VACOSSIN,
Élève en spéciales (institution Loriol).

Théorème. — *Tout plan passant par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre le décompose en deux parties équivalentes.*

Ce théorème, démontré dans les auteurs par les propriétés du quadrilatère gauche, peut aussi être établi par les considérations suivantes.

Soit DFEG un plan passant par les points milieux D,



E des côtés opposés du tétraèdre S, ABC. Ce plan détermine deux pentaèdres équivalents.

Traçons les deux plans DCG, DBF : le pentaèdre inférieur est décomposé en deux pyramides D, ACG, C, DFEG respectivement équivalentes aux deux pyramides D, SFB, B, DFEG qui composent le pentaèdre supérieur.

En effet, les pyramides quadrangulaires de même base DFEG ont même hauteur, car le plan de cette base passe par le milieu de la droite des sommets; par suite ces pyramides sont équivalentes. En second lieu, D, ACG est la moitié de S, ACG; D, SFB est aussi la moitié de A, SFB. En outre, S, ACG est équivalente à A, SFB : car soient V le volume du tétraèdre donné, d, d' les distances du plan sécant aux sommets A ou S, B ou C, on a

$$\frac{\text{S,ACG}}{\text{V}} = \frac{\text{ACG}}{\text{ACB}} = \frac{\text{AG}}{\text{AB}} = \frac{d}{d+d'},$$

$$\frac{\text{A,SFB}}{\text{V}} = \frac{\text{BSF}}{\text{SBC}} = \frac{\text{SF}}{\text{SC}} = \frac{d}{d+d'}.$$

Donc S, ACG est équivalente à A, SBF, et de ces deux résultats on conclut l'équivalence des pentaèdres.

Observations. — I. Des égalités précédentes, on conclut pour la mesure des deux tétraèdres

$$\text{D,ACG} = \text{D,SFB} = \frac{\text{V}d}{2(d+d')}$$

et pour leur somme $\frac{\text{V}d}{(d+d')}$.

A désignant l'aire de la section, on a pour les volumes des pyramides quadrangulaires

$$\text{C,DFEG} = \text{B,DFEG} = \frac{d'\text{A}}{3}.$$

Comme ces quatre pyramides composent V,

$$V = \frac{Vd}{d+d'} + \frac{2d'A}{3}$$

et

$$V = \frac{2}{3}(d+d')A.$$

II. Si D désigne la longueur de l'arête AB, α l'inclinaison de D sur le plan sécant,

$$d + d' = D\sin\alpha, \quad V = \frac{2}{3}D\sin\alpha . A.$$

III. Si le plan tourne, D et V restant constants,

$$A = \frac{3}{2}\cdot\frac{V}{D}\cdot\frac{1}{\sin\alpha};$$

donc A varie en raison inverse de $\sin\alpha$.

QUESTION 105

(voir tome IV, page 560);

SOLUTION DE M. ABRAHAM SCHNÉE,
Élève du lycée Charlemagne.

Considérant comme coordonnées rectangulaires d'un point les rayons de courbure des extrémités des diamètres conjugués d'une même ellipse, le lieu du point est l'enveloppe d'une droite de longueur constante inscrite dans un angle droit. (BRASSINE.)

L'expression du rayon de courbure d'une ellipse en fonction de l'abscisse du point considéré est

$$\rho = \frac{(a^4 - c^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}.$$

Si

$$y = mx, \quad y = -\frac{b^2}{a^2 m} x$$

sont les équations de deux diamètres conjugués de l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

on sait que les abscisses des points de rencontre avec la courbe sont données par

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 m^2 + b^2}, \quad x^2 = \frac{a^4 m^2}{a^2 m^2 + b^2};$$

x et y étant les coordonnées courantes d'un point de la courbe cherchée, on aura donc

$$x = \frac{\left(a^4 - c^2 \frac{a^2 b^2}{a^2 m^2 + b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}, \quad y = \frac{\left(a^4 - c^2 \frac{a^4 m^2}{a^2 m^2 + b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b},$$

d'où l'on tire

$$(a^4 bx)^{\frac{2}{3}} = a^4 - \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 m^2 + b^2}, \qquad (a^4 by)^{\frac{2}{3}} = a^4 - \frac{a^4 c^2 m^2}{a^2 m^2 + b^2}.$$

Eliminant m^2 entre ces équations, on a l'équation du lieu cherché

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \frac{a^2 + b^2}{a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}}};$$

c'est l'enveloppe d'une droite de longueur constante

$$\frac{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

inscrite dans un angle droit, celui des axes de l'ellipse.

NOTE SUR UN PROBLÈME CONNU;

PAR M. PAUL SERRET.

Une corde AB *d'une conique est vue, d'un point fixe* O, *sous un angle constant, trouver l'équation de son enveloppe.*

Ce problème, résolu géométriquement dans le *Traité des Propriétés projectives,* n'a été étudié par l'analyse que dans le cas particulier de l'angle droit. Voici cependant, pour le cas général, une méthode très-simple, fondée sur la transformation des équations, et qui s'appliquerait avec la même facilité à une courbe de degré quelconque, ou à certaines questions analogues de la géométrie de l'espace.

Soient

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

$$(2) \qquad y = mx + n$$

les équations de la conique donnée et de la corde variable AB, rapportées à des axes rectangulaires quelconques; et

$$(3) \qquad \varphi(x) = 0$$

l'équation ayant pour racines les abscisses des extrémités de la corde. Il suffira, pour résoudre le problème, de trouver la relation qui doit exister entre les paramètres m et n, pour que les droites OA, OB, qui réunissent les extrémités de la corde au point O (x', y'), fassent entre elles l'angle donné.

Or, mettant l'équation (2) sous la forme

$$(2') \qquad y - y' = m(x - x') - (y' - mx' - n),$$

divisant les deux membres par $x - x'$, et désignant par M le coefficient angulaire de l'une quelconque des droites OA ou OB, il vient

$$M = m - \frac{y' - mx' - n}{x - x'},$$

d'où

$$(4) \qquad x = \frac{y' - Mx' - n}{m - M}.$$

C'est la relation existant entre l'abscisse de chacune des extrémités de la corde et le coefficient angulaire de la droite qui unit cette extrémité au point O. Et si l'on substitue à x sa valeur dans l'équation (3), l'équation *transformée*

$$(5) \qquad \varphi\left(\frac{y' - Mx' - n}{m - M}\right) = 0$$

aura pour racines, en M, les coefficients angulaires des droites OA et OB. Il sera facile, dès lors, d'exprimer que les racines de cette équation sont liées par la relation

$$\frac{M' - M''}{1 + M'M''} = \text{const.};$$

et la relation entre m et n étant obtenue de la sorte, le problème s'achèvera par les moyens ordinaires.

Cette méthode s'applique à plusieurs problèmes analogues, et dont quelques-uns, abordés autrement, ne seraient pas sans difficulté.

REMARQUES SUR QUELQUES THÉORÈMES ÉNONCÉS DANS LES NOUVELLES ANNALES;

PAR M. L. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Question 609.

Cette question, déjà résolue par plusieurs élèves, est un cas particulier de celle-ci (*) : *Lorsqu'un triangle est conjugué à une conique, la somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale à la puissance de son centre relativement au cercle circonscrit au triangle.* Or, dans la question 609, le triangle RHC est conjugué au cercle décrit sur FF' comme diamètre. D'où l'on doit conclure que la tangente MT menée par le point M, milieu de FF', est égale à $\frac{FF'}{\sqrt{2}}$.

Sur les deux premiers théorèmes de M. Paul Serret (page 323).

A la page 50 du tome XVII des *Nouvelles Annales*, j'ai énoncé le théorème suivant : *Si l'on décompose un polygone abcd... en triangles, en joignant ses sommets à un point arbitraire i de son plan, l'on aura, o étant un point fixe et k une constante :*

$$\frac{\overline{iab}^2}{oia.oab.obi}+\frac{\overline{ibc}^2}{oib.obc.oci}+\ldots=k.$$

Le théorème I de l'endroit cité se déduit de celui-ci en

(*) *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 234.

supposant que les points o, i, a, b, c,..., soient sur un cercle de rayon R. Dans ce cas, en effet,

$$\frac{\overline{iab}^2}{oia.oab.obi} = \left(\frac{4R}{oi}\right)^2 \frac{iab}{oa^2.ob^2};$$

on a donc ce théorème : *Lorsqu'un polygone abcd... est inscrit dans un cercle, si l'on prend sur la circonférence deux points o et i, on aura, k étant une constante,*

$$\frac{iab}{oa^2.ob^2} + \frac{ibc}{ob^2.oc^2} + \ldots = k.\overline{oi}^2.$$

Si enfin les points o et i se confondent, cette relation donne

$$\frac{ab}{oa.ob} + \frac{bc}{ob.oc} + \ldots = 0,$$

c'est la première des relations indiquées, car, p étant la distance du point o au côté ab,

$$\frac{ab}{oa.ob} = \frac{1}{2R}\frac{ab}{p}.$$

Le théorème II est une conséquence du suivant, que j'ai démontré tome XVIII, page 181 : *Si l'on trace dans le plan d'un polygone une droite quelconque, la somme des triangles formés par deux côtés consécutifs du polygone et la droite arbitraire, divisés respectivement par le produit des distances de leurs sommets à une droite fixe, est constante.*

Soient A et B deux côtés consécutifs du polygone en question, c leur point de rencontre, a et b les points où ils sont coupés par la droite arbitraire I. Si l'on désigne par α, β, γ les distances des points a, b, c à la droite fixe, le théorème indiqué donne la relation

$$\sum \frac{abc}{\alpha.\beta\,\gamma} = k,$$

k étant une constante. Appelons o le point d'intersection de la droite fixe avec I, ω l'angle de ces deux droites, on a

$$\alpha.\beta = oa.ob.\sin^2\omega.$$

donc

$$\sum \frac{abc}{\gamma\; oa.ob} = k\sin^2\omega.$$

Lorsque la droite fixe coïncide avec I, cette somme devient nulle, et le point o est un point quelconque de I.

Si l'on suppose que les côtés du polygone et la droite I touchent un même cercle de rayon r, on aura, en prenant le point o au point de contact de la droite I,

$$oa = r\cot\frac{1}{2}a, \qquad ob = r\cot\frac{1}{2}b,$$

$$abc = r^2\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c,$$

donc

$$\sum \frac{\cot\frac{1}{2}c}{\gamma} = 0.$$

On devra dans ces théorèmes tenir compte des signes des perpendiculaires.

Les différents théorèmes auxquels nous avons fait allusion dans ce qui précède sont susceptibles d'un grand nombre de corollaires ; nous en ajouterons quelques-uns dont on pourra chercher des démonstrations directes.

1° Si une tangente roule sur un cercle inscrit à un polygone, la somme des distances de chaque sommet à la tangente mobile, multipliées respectivement par le sinus de l'angle formé à ce sommet, est égale au rayon du cercle multiplié par la somme des sinus des angles du polygone.

Ce théorème montre que le centre du cercle inscrit à

un polygone est le centre de gravité d'un système de points matériels placés aux sommets du polygone et dont les poids seraient proportionnels aux sinus des angles formés par les côtés du polygone qui aboutissent à ces sommets.

2° Lorsqu'un polygone est circonscrit à un cercle, la somme des produits que l'on obtient en multipliant chaque côté par la distance de son point de contact à une tangente quelconque, est égale à la surface du polygone.

Ce théorème montre que le centre du cercle inscrit à un polygone est le centre de gravité d'un système de points matériels placés aux points de contact et dont les poids seraient représentés par les côtés correspondants.

3° Un polygone étant circonscrit à un cercle, on mène par son centre une transversale arbitraire. Cette transversale divise chaque côté en deux segments dont la somme des inverses est constante, les segments étant comptés à partir du point d'intersection avec la transversale. Etc.

SUR LA SÉRIE DE TAYLOR;

PAR M. TURQUAN,
Professeur au lycée de Tours.

Soient fx une fonction quelconque de x, et x_1 et x_1+h deux valeurs particulières de x; on pourra toujours poser

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{aligned} f(x_1+h) = fx_1 + \frac{h}{1}f'x_1 + \frac{h^2}{1.2}f''x_1 + \ldots \\ + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}x_1 + h^n\mathrm{R}, \end{aligned}\right.$$

$h^n\mathrm{R}$ étant un terme complémentaire convenablement choisi et qu'il s'agit de déterminer.

L'égalité (A) peut être mise sous la forme

$$\frac{f(x_1+h)-fx_1}{h}=f'x_1+\frac{h}{1.2}f''x_1+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-2}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}x_1+h^{n-1}R;$$

or l'équation $y=fx$ représente une courbe, fx_1 est l'ordonnée d'un certain point A de cette courbe, $f(x_1+h)$ est l'ordonnée d'un autre point B, et $\frac{f(x_1+h)-fx_1}{h}$ est la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des x la corde qui joint ces deux points. Si donc $f(x)$ et sa dérivée sont finies et continues, c'est-à-dire si ces deux fonctions ne prennent aucune valeur infinie, et ne passent pas brusquement d'une valeur finie à une autre valeur finie, quand x varie depuis $x=x_1$ jusqu'à x_1+h, on pourra mener à l'arc AB une tangente parallèle à sa corde, car cet arc n'aura aucun point dont l'ordonnée soit infinie, ni aucun point d'arrêt, ni aucun point de rupture, ni aucun point de rebroussement; et le point de l'arc AB par lequel on peut mener une tangente parallèle à la corde AB, a une abscisse comprise entre x_1 et x_1+h et qu'on peut représenter par $x_1+\theta h$, θ étant un nombre positif compris entre o et 1. On aura donc

$$\frac{f(x_1+h)-fx_1}{h}=f'(x_1+\theta h),$$

et par suite

$$(B)\left\{\begin{aligned}&f'(x_1+\theta h)=f'x_1+\frac{h}{1.2}f''x_1+\frac{h^2}{1.2.3}f'''x_1+\ldots\\&\qquad+\frac{h^{n-2}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}x_1+h^{n-1}R,\end{aligned}\right.$$

ou bien encore

$$\frac{f'(x_1+\theta h)-f'x_1}{\theta h}=\frac{1}{1.2.\theta}f''x_1+\frac{h}{1.2.3.\theta}f'''x_1+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-3}}{1.2\ldots(n-1)\theta}f^{n-1}x_1+\frac{h^{n-2}}{\theta}\mathrm{R}.$$

Et si $f'x$ et $f''x$ restent finies et continues pour toute valeur de x comprise entre x_1 et $x_1+\theta h$, ou bien entre x_1 et x_1+h, parce que θ peut être infiniment peu différent de 1, $\frac{f'(x_1+\theta h)-f'x_1}{\theta h}$ sera égal à $f''(x_1+\theta'\theta h)$, le produit $\theta'\theta$ étant un nombre positif compris entre o et 1 et que je représenterai par la seule lettre θ'. Ainsi,

$$\text{(C)}\quad\left\{\begin{aligned}&f''(x_1+\theta' h)=\frac{1}{1.2.\theta}f''x_1+\ldots\\&\qquad+\frac{h^{n-3}}{1.2\ldots(n-1)\theta}f^{n-1}x_1+\frac{h^{n-2}}{\theta}\mathrm{R}.\end{aligned}\right.$$

Mais, comme cette égalité (C) doit avoir lieu aussi pour $h=0$, il en résulte

$$f''x_1=\frac{1}{1.2.\theta}f''x_1,$$

d'où

$$\frac{1}{1.2.\theta}=1.$$

Donc, en supprimant l'accent de θ',

$$f''(x_1+\theta h)=f''x_1+\frac{h}{3}f'''x_1+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-3}}{1.3\ldots(n-1)}f^{n-1}x_1+1.2.h^{n-2}\mathrm{R}.$$

En répétant les mêmes considérations et les mêmes

raisonnements, nous obtiendrons successivement :

$$f'''(x_1 + \theta h) = f''' x_1 + \ldots + 1.2.3.h^{n-3}\mathrm{R},$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x_1 + \theta h) = f^{\mathrm{IV}} x_1 + \ldots + 1.2.3.4.h^{n-4}\mathrm{R},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{n}(x_1 + \theta h) = 1.2.3\ldots n.\mathrm{R},$$

d'où

$$\mathrm{R} = \frac{f^{n}(x_1 + \theta h)}{1.2.3\ldots n}.$$

Ainsi, pourvu que fx et ses dérivées jusqu'à celle du $n^{ième}$ ordre inclusivement soient finies et continues, pour toute valeur de x comprise entre x_1 et $x_1 + h$, on a

$$f(x_1 + h) = fx_1 + \frac{h}{1} f' x_1 + \frac{h^2}{1.2} f'' x_1 + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1} x_1 + \frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)n} f^{n}(x_1 + \theta h).$$

QUESTION 406

(voir tome XVI, page 401) (*);

SOLUTION DE M. D. THOMAS (TRINITY COLLEGE, OXFORD).

Soient

$$\mathrm{U}_1 = 0, \quad \mathrm{U}_2 = 0, \quad \mathrm{U}_3 = 0$$

(*) Cette question a pour énoncé :

Soient $\mathrm{U}_1 = 0$, $\mathrm{U}_2 = 0$, $\mathrm{U}_3 = 0$ les équations rendues homogènes de trois cercles, l'équation du cercle qui coupe ces trois cercles à angle droit est donnée par cette relation

$$\begin{vmatrix} \frac{d\mathrm{U}_1}{dx} & \frac{d\mathrm{U}_1}{dy} & \frac{d\mathrm{U}_1}{dz} \\ \frac{d\mathrm{U}_2}{dx} & \frac{d\mathrm{U}_2}{dy} & \frac{d\mathrm{U}_2}{dz} \\ \frac{d\mathrm{U}_3}{dx} & \frac{d\mathrm{U}_3}{dy} & \frac{d\mathrm{U}_3}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

les trois cercles donnés;

$$U = 0$$

le cercle cherché.

En représentant par PP′ un diamètre du cercle U, nous savons que la polaire du point P par rapport à chacun des cercles U_1, U_2, U_3 passe par P′.

Donc en exprimant la condition que les droites

$$\xi \frac{dU_1}{dx} + \eta \frac{dU_1}{dy} + \zeta \frac{dU_1}{dz} = 0,$$

$$\xi \frac{dU_2}{dx} + \eta \frac{dU_2}{dy} + \zeta \frac{dU_2}{dz} = 0,$$

$$\xi \frac{dU_3}{dx} + \eta \frac{dU_3}{dy} + \zeta \frac{dU_3}{dz} = 0,$$

se coupent au même point, nous aurons, pour l'équation du cercle cherché,

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

C. Q. F. D.

QUESTIONS.

633. 2S étant l'aire d'un quadrilatère sphérique inscrit; *a*, *b*, *c*, *d* les côtés; 2*p* le périmètre, on a

$$\sin S = \frac{\sqrt{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)\sin(p-d)}}{2\left(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d\right)},$$

$$\cos S = \frac{\cos a + \cos b + \cos c + \cos d}{4\left(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}a\right)},$$

$$\tan g\frac{S}{2} = \sqrt{\tan g\frac{p-a}{2}\tan g\frac{p-b}{2}\tan g\frac{p-c}{2}\tan g\frac{p-d}{2}}.$$

P.

634. Si l'on appelle E et F les axes d'une ellipse, e, f, e', f', e'', f'', les axes de ses projections sur trois plans rectangulaires, on a

$$2E^2 + 2F^2 = e^2 + f^2 + e'^2 + f'^2 + e''^2 + f''^2,$$
$$E^2F^2 = e^2f^2 + e'^2f'^2 + e''^2f''^2.$$

P.

635. On sait que si d'un point M pris sur le plan d'une conique C, ayant pour foyers F, F', on mène à cette courbe deux tangentes MT, MT', et les deux droites MF, MF', les angles TMF, T'MF' sont égaux, de sorte que si le point M est pris sur une autre conique C' ayant les mêmes foyers F, F' que C, la bissectrice de l'angle des tangentes, ou de son adjacent, est tangente à la courbe C' au point M. Prouver que toute courbe C'' qui par rapport à la conique C jouit de la même propriété, est une conique ayant les mêmes foyers F et F'.

636. On suppose que des rayons perpendiculaires à l'axe d'une parabole soient, à leur rencontre avec cette courbe, réfléchis de manière que l'angle de réflexion égale l'angle d'incidence : trouver l'enveloppe des rayons réfléchis, et déterminer géométriquement le point de contact d'un rayon réfléchi et de l'enveloppe.

637. Les quatre faces d'un tétraèdre passent, chacune, par un point fixe; les trois côtés de l'une des quatre faces sont assujettis à rester, chacun, sur un plan fixe : trouver le lieu géométrique du sommet du tétraèdre opposé à cette face.

Ce lieu est en général une surface du troisième degré, qui se réduit à un cône du second degré quand les quatre points fixes sont situés sur un même plan. (R. SALMON.)

638. Trouver sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe le lieu géométrique d'un point tel, que les deux génératrices rectilignes menées par ce point fassent un angle donné.

Cas particulier où l'angle donné est droit.

639. Trouver sur la surface d'un paraboloïde hyperbolique le lieu géométrique d'un point tel, que les deux génératrices rectilignes menées par ce point fassent un angle donné.

Cas particulier où l'angle donné est droit.

BIBLIOGRAPHIE.

THÉORIE DES SÉRIES, contenant : 1° les règles de convergence et les propriétés fondamentales des séries; 2° l'étude et la sommation de quelques séries; 3° quelques applications de la théorie des séries au calcul des expressions transcendantes; par *M. H. Laurent*, officier du génie, ancien élève de l'École Polytechnique. Ouvrage destiné aux candidats des Écoles Polytechnique et Normale, et aux personnes qui désirent suivre les cours des Facultés des Sciences. In-8° de VIII-124 pages. Paris, Mallet-Bachelier. — Prix : 4 francs.

Voici un petit livre où les séries sont traitées avec beaucoup de soin, on peut même dire avec amour, car M. Hermann Laurent aime véritablement les séries. Ce n'est point un mal, s'il est vrai qu'on ne puisse réussir dans un sujet quelconque sans y mettre un peu de passion.

Après quelques définitions, l'auteur expose les principales propriétés des séries. L'énoncé qui accompagne la remarque II du Ier théorème aurait dû être présenté comme la définition même des séries convergentes, présentée sous une forme un peu différente. La réciproque en est donc vraie, comme doit l'être la réciproque de toute bonne définition. Aussi quand on dit, avec certains auteurs : « Pour qu'une série soit convergente, il *suffit* que la somme des p termes qui suivent le $n^{ième}$ diminue indéfiniment *quel que soit p* », on n'apprend rien de plus au lecteur que si on lui disait qu'une série est convergente... quand elle est convergente. Quelquefois on n'énonce pas la proposition correctement ou l'on explique mal ce qu'il faut entendre par les mots « quel que soit p » ; alors on a une proposition fausse, comme l'a démontré M. Catalan dans son excellent *Traité des Séries*.

M. Laurent ne s'explique pas complétement sur cette difficulté, mais il regarde le prétendu théorème comme n'étant nullement indispensable à la théorie des séries, en quoi il a parfaitement raison.

La démonstration du théorème III (p. 9), relatif aux séries de la forme $r_0 + r_1 \sin\theta + r_2 \sin 2\theta, \ldots$, nous a paru être des plus ingénieuses. Viennent ensuite quelques propositions sur les séries à termes imaginaires et sur celles dont la valeur ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes sont écrits. C'est, je crois, Dirichlet qui a le premier montré que la valeur de certaines séries pouvait changer quand on altérait l'ordre des termes, remarque importante et qui montre avec quelle précaution on doit user des suites infinies.

Les principales règles de convergence sont présentées avec beaucoup d'ordre et démontrées avec netteté, mais l'auteur a oublié de faire voir que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ ont la même

limite, ce qui fait rentrer le théorème V (p. 38) dans le théorème III.

Le reste de l'ouvrage est consacré à des exemples et à des applications. Nous regrettons que l'auteur ait dit (p. 75) qu'*il serait facile de démontrer que si x est entier, la série e^x est le développement d'un nombre incommensurable*. Cette manière de parler est aujourd'hui fort discréditée par suite de l'abus qu'en ont fait quelques médiocrités prétentieuses. Dans l'exemple, le théorème ne nous paraît pas du tout facile, et si M. Laurent en a une démonstration simple, il nous obligera beaucoup de nous la communiquer. Lambert le premier a fait voir, à l'aide des fractions continues, que toutes les puissances de e dont l'exposant est commensurable sont incommensurables. Sa démonstration est extrêmement ingénieuse comme tout ce qui est sorti de cet esprit si profond et si élégant. M. Liouville a ensuite démontré que e ne pouvait être racine d'une équation du deuxième degré à coefficients rationnels, démonstration simple, facile, mais non *facile à trouver*. J'ignore si l'on est allé plus loin dans cette matière.

En résumé, l'ouvrage de M. Laurent, sans rien renfermer de véritablement nouveau, nous paraît une bonne exposition d'une théorie importante, et nous le recommandons aux élèves. A part les critiques de détail que nous venons de faire, nous n'aurions que des éloges à donner à l'auteur, sans quelques passages de la préface et du livre, passages dont le ton peu convenable nous paraît devoir être relevé. Après un tableau très-exagéré des erreurs dans lesquelles sont tombés de grands géomètres à propos des séries, M. Laurent ajoute : « La théorie des séries était encore, il n'y a pas cinquante ans, un véritable chaos. Le génie seul de Cauchy parvint à lui donner une base solide. Ce grand géomètre fit ce que ni les

Newton, ni les Euler (*), ni les Bernoulli, ni les Lagrange n'avaient pu faire. Il mit de la rigueur dans l'étude des séries. On (**) raconte même à ce sujet que Laplace écoutant la lecture du premier Mémoire de Cauchy sur les séries, frappé de la justesse des idées émises par ce géomètre, rentra *effrayé* chez lui, d'où il *n'osa* sortir qu'après avoir soigneusement vérifié la convergence de toutes les séries qu'il avait employées dans sa *Mécanique céleste.* » (Préface, p. VI.)

Et plus loin :

« Lorsqu'on ouvre les écrits des auteurs de ces derniers siècles, on les voit attribuer avec une *audace remarquable* des valeurs telles que $\frac{1}{2}$ à la série $1 - 1 + 1 - 1 \ldots.$ Leibniz, pour le démontrer, etc. (p. 2). »

« Euler [*Introduction à l'analyse des infiniment petits* (***)], Lacroix [*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (****)], reproduisent *hardiment* l'erreur de Leibniz (p. 3). »

M. Laurent ne fera croire à personne qu'il ait été au-dessus des forces d'un Newton ou d'un Leibniz de mettre de la rigueur dans l'étude des séries. Ils ont accompli des choses bien plus difficiles. Quant à l'auteur de la *Mécanique céleste,* ce serait donc à son insu qu'il n'aurait employé que des séries convergentes et, sans un heureux hasard, le grand monument qu'il avait élevé aurait pu s'écrouler comme un château de cartes? Cela n'est vraiment pas soutenable.

(*) L'ordre chronologique demandait qu'Euler fût placé entre Bernoulli et Lagrange.

(**) Qui?

(***) Quel volume? quelle page?

(****) Quel volume? quelle page? Il faudrait au moins citer exactement ceux que l'on critique.

Si M. Laurent, qui est très-jeune et dont l'érudition n'est que de seconde main, avait eu recours aux sources originales, il se serait bien gardé de parler d'une manière aussi irrévérencieuse de l'*audace* de Leibniz et de la *hardiesse* d'Euler. Non-seulement la lecture des ouvrages de ces grands hommes l'aurait rendu indulgent pour leurs erreurs, mais encore elle lui aurait montré combien sa critique est mal fondée. Si Leibniz et Euler avaient dit : « J'appelle somme de la série $1-1+1-1+1\ldots$ la *limite* vers laquelle tend la somme de ses termes quand on en prend un nombre de plus en plus grand, et je vais démontrer que cette somme est $\frac{1}{2}$ », ils auraient avancé une chose parfaitement absurde. Mais telle n'était point leur pensée. Leibniz (*) part d'un problème qui conduit, lorsque x est moindre que 1, à la série

$$1-x+x^2-x^3+\ldots;$$

puis faisant converger x vers 1, il voit que la solution tend vers $\frac{1}{2}$, valeur par laquelle il remplace la série générale devenue dans ce cas $1-1+1-1+\ldots$. En second lieu il se pose un problème de probabilité qui conduit à la même série et il trouve encore $\frac{1}{2}$. Tout cela est loin d'être absurde. Quant à Euler, je n'ai pas sous les yeux les passages dont parle M. Laurent. Mais le grand analyste s'est expliqué lui-même sur le sens qu'il attribuait à la somme d'une série divergente ; c'est pour lui la valeur de la fonction dont le développement donne la série (**). On peut s'exprimer et il est même préférable de s'expri-

(*) *Epistola ad Christanum Wolfium circa scientiam infiniti* (*Act. Erud.*, suppl. ad. t. V, 1713.

(**) Montucla, *Histoire des Mathématiques*, 2e édit., t. III, p. 221.

mer autrement; mais je ne vois rien là de contraire à la plus sévère logique. Ainsi voilà Leibniz et Euler hors de cause.

Je trouve à la page 2 une excellente explication du paradoxe de la série $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$. J'étonnerais bien M. Laurent si je lui disais que cette explication, aujourd'hui tombée dans le domaine public, est d'un auteur de l'un de ces siècles d'ignorance qui ont précédé Cauchy. En 1696, Jacques Bernoulli dans une thèse sur les séries (*), après avoir montré qu'on a

$$\frac{l}{m+n} = \frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} \cdots$$

saltem si ponatur $m > n$, ajoute un peu plus loin : *Ratio autem paradoxi* $\frac{l}{2m} = \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} \cdots$ *est quod continuata divisione ipsius* l *per* $m + m$, *residuum divisionis non minuitur, sed perpetuo ipsi* l *æquale manet : unde quotiens divisionis proprie non est* sola *series* $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} \cdots$ *sed* $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} \cdots, + vel - \frac{l}{2m}$. *faciendo*. Et cependant Jacques Bernoulli est un de ceux auxquels M. Laurent reproche de n'avoir pas su mettre de la rigueur dans l'étude des séries.

Nous pourrions encore citer un Mémoire de Varignon (**) sur les précautions à prendre dans l'emploi des séries, pour savoir quand elles donnent vrai ou quand elles donnent faux, les règles de convergence de Maclaurin, d'Euler, etc.; mais en voilà assez pour montrer que les reproches adressés aux prédécesseurs de Cauchy n'étaient pas mérités ou ne pouvaient s'appliquer qu'à

(*) *Opera*, p. 752.
(**) *Académie des Sciences*, 1715, p. 202.

des auteurs du second ordre. Si nous avons insisté là-dessus, ce n'est pas pour donner une facile leçon d'histoire à M. Laurent, encore moins pour causer de la peine à un jeune homme dont les succès nous seront toujours chers; mais nous tenions à prémunir les jeunes lecteurs contre des assertions tranchantes qu'ils ne peuvent contrôler actuellement Il ne faut pas laisser perdre le respect que nous devons aux créateurs de la science. Imitons-les si nous le pouvons, mais ne cessons jamais de les honorer. P.

NOTE SUR L'ENVELOPPE D'UNE DROITE;

PAR M. JOSEPH SACCHI (DE MILAN).

Soient

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x)$$

les équations de deux courbes AN, BN rapportées à des axes orthogonaux OX, OY; $f(\alpha, 6) = 0$ une relation donnée entre les abscisses α, 6 de deux points A, B des mêmes courbes; n l'abscisse du point N. En supposant que le point A se meuve sur la courbe AN, il en sera de même de B et de la droite AB, laquelle sera tangente à une ligne enveloppe en un point M qu'on veut déterminer.

En posant

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \varphi'_{(\alpha)}, \quad \frac{d\psi}{d6} = \psi'_{(6)}, \ldots,$$

et en prenant les dérivées par rapport à α des deux équations suivantes

$$(y - \varphi_{(\alpha)})(6 - \alpha) = (x - \alpha)(\psi_{(6)} - \varphi_{(\alpha)}), \quad f(\alpha, 6) = 0,$$

dont la première représente la droite AB, on a

$$(1)\quad \begin{cases} [y-\varphi_{(\alpha)}-(x-\alpha)\psi'_{(6)}]6' = y-\psi_{(6)}-(x-6)\varphi'_{(\alpha)} \\ \text{et} \qquad f'_{(\alpha)}+f'_{(6)}6' = 0. \end{cases}$$

En éliminant de ces quatre équations α, 6, $6'$, on aurait l'équation de la courbe enveloppe.

Que l'on nomme t la tangente de l'angle que AB fait avec OX, et que l'on suppose M placé entre A et B, on aura

$$y-\varphi_{(\alpha)} = t(x-\alpha), \quad y-\psi_{(6)} = t(x-6), \quad \frac{x-\alpha}{6-x} = \frac{\text{MA}}{\text{MB}}.$$

Au moyen de ces équations, éliminant des équations (1) les quantités

$$6', \quad y-\varphi_{(\alpha)}, \quad y-\psi_{(6)}, \quad x-\alpha,$$

on obtient

$$(2)\qquad \text{MA}\left(\frac{\psi'_{(6)}-t}{f'_{(6)}}\right) = \text{MB}\left(\frac{\varphi'_{(\alpha)}-t}{f'_{(\alpha)}}\right);$$

cette dernière détermine, dans des cas particuliers, la position du point M sur la droite AB, comme on va le voir dans les applications suivantes.

Applications. — I. Supposons que la droite AB se meuve de manière que la longueur de l'arc ANB soit constante et égale à h.

En faisant

$$\sqrt{1+\varphi'^2_{(x)}} = p'_{(x)}, \quad \sqrt{1+\psi'^2_{(x)}} = q'_{(x)},$$

on aura

$$f(\alpha, 6) = p_{(n)} - p_{(\alpha)} + q_{(6)} - q_{(n)} - h;$$

d'où l'on tire

$$f'_{(\alpha)} = -p'_{(\alpha)} = -\sqrt{1+\varphi'^2_{(\alpha)}},$$

et

$$f'_{(6)} = q'_{(6)} = \sqrt{1 + \psi'^2_{(6)}}.$$

En substituant à $f'_{(\alpha)}$, $f'_{(6)}$, ces valeurs dans l'équation (2), et divisant par $\sqrt{1+t^2}$, on a

$$\text{MA}\left(\frac{\psi'_{(6)} - t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+\psi'^2_{(6)}}}\right) = \text{MB}\left(\frac{t - \varphi'_{(\alpha)}}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+\varphi'^2_{(\alpha)}}}\right).$$

Si l'on conduit AT, BT, tangentes aux deux courbes aux points A et B, et les droites BV, AV, respectivement parallèles à ces tangentes, la dernière équation pourra être remplacée par la suivante

$$\text{MA}\sin\text{TBA} = \text{MB}\sin\text{TAB},$$

ou bien

$$\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = \frac{\text{TB}}{\text{TA}} = \frac{\text{VA}}{\text{VB}},$$

d'où l'on conclut que le point M est déterminé par la bissectrice VM de l'angle AVB.

II. Soit constante et égale à a l'aire du triangle mixtiligne ANB.

Si l'on pose

$$\varphi_{(x)} = p'_{(x)}, \quad \psi_{(x)} = q'_{(x)},$$

on aura l'équation

$$f(\alpha, 6) = p_{(n)} - p_{(\alpha)} + q_{(6)} - q_{(n)} - \frac{1}{2}(6 - \alpha)(\varphi_{(\alpha)} + \psi_{(6)}) - a,$$

laquelle, en observant que $\psi_{(6)} - \varphi_{(\alpha)} = t(6 - \alpha)$, donne

$$f'_{(\alpha)} = \frac{1}{2}(\alpha - 6)(\varphi'_{(\alpha)} - t) \quad \text{et} \quad f'_{(6)} = \frac{1}{2}(\alpha - 6)(\psi'_{(6)} - t).$$

Par conséquent, de l'équation (2) on déduit MA = MB, c'est-à-dire que le point M est le milieu de AB.

III. Soit constante et égale à b la longueur de la corde

AB, on aura

$$f(\alpha, \beta) = (\psi_{(\beta)} - \varphi_{(\alpha)})^2 + (\beta - \alpha)^2 - b^2,$$
$$f'_{(\alpha)} = -2(\beta - \alpha)(1 + t\varphi'_{(\alpha)}),$$
$$f'_{(\beta)} = 2(\beta - \alpha)(1 + t\psi'_{(\beta)});$$

ces valeurs changent l'équation (2) en la suivante

$$\text{MA}\left(\frac{\psi'_{(\beta)} - t}{1 + t\psi'_{(\beta)}}\right) = \text{MB}\left(\frac{t - \varphi'_{(\alpha)}}{1 + t\varphi'_{(\alpha)}}\right),$$

qui est équivalente à

(3) $$\text{MA tang TBA} = \text{MB tang TAB};$$

d'où, en désignant par P le point de rencontre des deux normales aux courbes en A et B, on a

$$\text{MA tang PAB} = \text{MB tang PBA};$$

cette dernière égalité montre que le point M est la projection de P sur AB.

Si la projection de T sur AB est R, on aura

$$\text{RB tang TBA} = \text{RA tang TAB},$$

et delà, en ayant égard à l'égalité (3),

$$\text{MA} = \text{RB}, \quad \text{MB} = \text{RA},$$

relations qui démontrent la propriété énoncée par M. Böklen, dans la question (616) page 156 de ce journal (*), relative au cas où la droite constante AB se meut de manière que ses deux extrémités A, B restent sur deux droites fixes TA, TB.

(*) Dans cette question où l'on dit que : *la projection orthogonale de* O *est aussi éloignée de* M..., il faut lire : *la projection orthogonale de* N *sur* MO *est aussi éloignée de* O....

Observation. — Les règles données pour déterminer le point M sur AB subsistent évidemment quelle que soit la ligne ANB, composée d'un nombre *quelconque* d'arcs de courbes différentes, puisqu'elles ne dépendent que des points A, B qui ne peuvent appartenir qu'à deux courbes ou à une seule.

NOTE SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE;

PAR M. BAEHR,
Professeur à Groningue.

Dans le tome XI, pages 66 et suivantes des *Nouvelles Annales*, M. Dieu remarque que si $X dx + Y dy + Z dz$ est une différentielle exacte à trois variables, un système de droites qui ont leurs origines ou points de départ sur une surface donnée S, et dont les directions sont déterminées en fonctions des coordonnées de leurs origines par les *cosinus* X, Y, Z, peut être coupé normalement par une autre surface, quelle que soit d'ailleurs la surface S.

En cherchant à expliquer cette propriété particulière au système, on trouve que, dans le cas dont il s'agit, on peut prendre l'origine de chaque droite en un point quelconque de sa direction, c'est-à-dire que les *cosinus* X, Y, Z, *ne changent pas de valeurs si à* x, y, z, *on substitue* $x + pX$, $y + pY$, $z + pZ$, *p étant une longueur arbitraire;* de sorte qu'ici le système des droites est en effet indépendant de la surface S.

De plus, posant

$$X dx + Y dy + Z dz = dF(x, y, z,),$$

on obtiendra la surface normale aux droites, si l'on prend

sur chacune d'elles, à partir du point où elle perce la surface S et du même côté, une longueur r donnée par l'intégrale de l'équation (3), page 67 (*), d'où

$$r = -F(x, y, z,) + \text{const.}$$

Et *si l'on donne de même à* x, y, z, *les accroissements* pX, pY, pZ, la fonction F *deviendra* $F + p$; par conséquent r diminuera de p; de sorte que, pour une même valeur de la constante dans l'intégrale, on retombera toujours sur la même surface normale aux droites, quelles que soient leurs origines.

En effet, remarquant bien que X, Y, Z, ne sont pas simplement proportionnels aux *cosinus* qui déterminent la direction d'une droite, mais qu'ils sont ces cosinus eux-mêmes, on obtiendra en différentiant $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ successivement par rapport à x, y, z, et en ayant égard aux conditions

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy},$$

qui expriment que $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X\frac{dX}{dx} + Y\frac{dX}{dy} + Z\frac{dX}{dz} &= 0, \\ X\frac{dY}{dx} + Y\frac{dY}{dy} + Z\frac{dY}{dz} &= 0, \\ X\frac{dZ}{dx} + Y\frac{dZ}{dy} + Z\frac{dZ}{dz} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Mais, pour des accroissements quelconques de x, y, z, la fonction X devient

$$X + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \left(\frac{dX}{dx}\Delta x + \frac{dX}{dy}\Delta y + \frac{dX}{dz}\Delta z \right)^n,$$

(*) Cette équation est $dr + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$ (t. XI, p. 67).

si, dans le développement des puissances du trinôme, on change $(dX)^n$ en d^nX. On voit d'abord que le premier terme du développement, celui qu'on obtiendrait pour $n=1$, s'évanouit, en vertu de la première des équations (1), si les accroissements Δx, Δy, Δz, sont proportionnels à X, Y, Z; il est facile de démontrer que la même chose arrive alors pour les termes suivants.

En effet, différentiant la première des équations (1) successivement par rapport à x, y, z, on a

$$X\frac{d^2X}{dx^2}+Y\frac{d^2X}{dx\,dy}+Z\frac{d^2X}{dx\,dz}$$
$$+\frac{dX}{dx}\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dx}\frac{dX}{dy}+\frac{dZ}{dx}\frac{dX}{dz}=0,$$
$$X\frac{d^2X}{dy\,dx}+Y\frac{d^2X}{dy^2}+Z\frac{d^2X}{dy\,dz}$$
$$+\frac{dX}{dy}\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}\frac{dX}{dy}+\frac{dZ}{dy}\frac{dX}{dz}=0,$$
$$X\frac{d^2X}{dx\,dz}+Y\frac{d^2X}{dy\,dz}+Z\frac{d^2X}{dz^2}$$
$$+\frac{dX}{dz}\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dz}\frac{dX}{dy}+\frac{dZ}{dz}\frac{dX}{dz}=0;$$

multipliant ces résultats respectivement par X, Y, Z, ajoutant les produits, en ayant égard aux trois équations (1) et écrivant dX^2 pour indiquer d^2X, on obtient l'équation symbolique

$$\left(X\frac{dX}{dx}+Y\frac{dX}{dy}+Z\frac{dX}{dz}\right)^2=0,$$

qui fait voir que le second terme du développement précédent s'évanouit en même temps que le premier. La même chose aura lieu pour les termes suivants, de sorte que X s'accroît de zéro. Il en est de même des accroissements de Y et de Z.

La fonction F devient, symboliquement, si l'on donne à x, y, z, des accroissements, arbitraires

$$F + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{1.2.3..\,n} \left(\frac{dF}{dx} \Delta x + \frac{dF}{dy} \Delta y + \frac{dF}{az} \right)^n.$$

Mais, remarquant que

$$\frac{dF}{dx} = X, \quad \frac{dF}{dy} = Y, \quad \frac{dF}{dz} = Z,$$

et que

$$\frac{d^2 F}{dx\, dy} = \frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx},$$

$$\frac{d^2 F}{dx\, dz} = \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx},$$

$$\frac{d^2 F}{dz\, dy} = \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy};$$

le développement réel pourra être mis sous la forme

$$\begin{aligned} &F + (X \Delta x + Y \Delta y + Z \Delta z) \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dX}{dx} \Delta x + \frac{dX}{dy} \Delta y + \frac{dX}{dz} \Delta z \right) \Delta x \right. \\ &\quad + \left(\frac{dY}{dx} \Delta x + \frac{dY}{dy} \Delta y + \frac{dY}{dz} \Delta z \right) \Delta y \\ &\quad \left. + \left(\frac{dZ}{dx} \Delta x + \frac{dZ}{dy} \Delta y + \frac{dZ}{dz} \Delta z \right) \Delta z \right] + \ldots, \end{aligned}$$

ce qui, en vertu des équations (1), se réduit à

$$F + p(X^2 + Y^2 + Z^2) \quad \text{ou} \quad F + p,$$

si l'on prend les accroissements de x, y, z, respectivement égaux à pX, pY, pZ. Donc la fonction F s'accroît de p, et r de $-p$.

On peut arriver aux mêmes résultats plus généralement et sans le secours de la série de Taylor.

Les fonctions X, Y, Z satisfaisant toujours à l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

on a, lorsque $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est la différentielle d'une certaine fonction φ de x, y, z, l'équation aux *différentielles partielles*

$$(2) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = 1,$$

dont

$$\varphi = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

où a, b, c sont des constantes, est une *solution complète*, de laquelle on peut déduire toutes les fonctions possibles qui satisfont à l'équation (2). Car, si $F(x, y, z)$ est une telle fonction, on peut d'abord lui donner la forme de φ, en déterminant a, b, c, qui alors deviennent des fonctions de variables, par les équations

$$(3) \quad F\frac{dF}{dx} = (x-a), \quad F\frac{dF}{dy} = (y-b), \quad F\frac{dF}{dz} = (z-c),$$

dont la somme des carrés donne en effet

$$F^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Par la différentiation on a alors

$$F\,dF = (x-a)(dx-da) + (y-b)(dy-db) + (z-c)(dz-dc).$$

Mais, si l'on multiplie les équations (3), respectivement par dx, dy, dz, la somme des produits donne aussi

$$F.dF = (x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz;$$

de sorte que si F satisfait à l'équation (2), les fonctions a, b, c déterminées par les équations (3) seront toujours

telles, qu'on a identiquement

$$(4) \qquad (x-a)da+(y-b)db+(z-c)dc=0,$$

ce qui, en exceptant le cas où l'on aurait $x=a$, $y=b$, $z=c$ qui donnerait $F=0$, et celui où a, b, c restent constantes, qui revient à la solution complète, ne peut avoir lieu à moins que deux des quantités a, b, c ne soient des fonctions de la troisième, ou que l'une d'elles ne soit une fonction des deux autres.

Soit dans le premier cas

$$a=\psi(c), \quad b=\psi_1(c);$$

ψ, ψ_1 désignant des fonctions prises arbitrairement, et ψ', ψ'_1 leurs dérivées, l'équation (4) devient

$$(5) \quad [x-\psi(c)]\psi'(c)+[y-\psi_1(c)]\psi'_1(c)+(z-c)=0,$$

et donnera

$$c=f(x,y,z)=f,$$

et par suite

$$a=\psi(f), \quad b=\psi_1(f).$$

La substitution de ces valeurs dans les équations (3) donne

$$(6) \quad X=\frac{dF}{dx}=\frac{x-\psi(f)}{F}, \quad Y=\frac{y-\psi_1(f)}{F}, \quad Z=\frac{z-f}{F}.$$

D'après cela, il est facile de démontrer que la valeur de c, et par suite celles de a et b, ne changent pas lorsqu'on donne à x, y, z, les accroissements pX, pY, pZ. Car, au lieu de faire cette substitution dans $c=f(x,y,z)$, on peut la faire dans l'équation (5) elle-même, qui détermine c pour des valeurs quelconques des variables. On obtient alors

$$\left.\begin{array}{l}[x-\psi(c)]\psi'(c)+[y-\psi_1(c)]\psi'_1(c)+(z-c)\\ +\frac{p}{F}\{[x-\psi(f)]\psi'(c)+[y-\psi_1(f)]\psi'_1(c)+(z-f)\}\end{array}\right\}=0,$$

équation à laquelle on satisfait de nouveau par

$$c = f(x, y, z),$$

parce qu'elle devient alors le résultat de la substitution de $c = f$ dans l'équation (5), multipliée par $1 + \frac{p}{F}$.

Pour ces mêmes accroissements des variables, $(x - a)$ devient, en remarquant que a ne change pas,

$$x + pX - a, \quad \text{ou} \quad (x - a) + p\frac{x - a}{F} = (x - a)\left(1 + \frac{p}{F}\right), \ldots$$

De sorte que $F = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$ deviendra $F\left(1 + \frac{p}{F}\right)$ ou $F + p$.

Tandis que X devient $\dfrac{(x - a)\left(1 + \frac{p}{F}\right)}{F + p}$ ou $\dfrac{x - a}{F}$.

C'est-à-dire que F s'accroît de p, tandis que X, Y, Z restent les mêmes.

Dans le second cas, si l'on pose

$$c = \psi(a, b),$$

ψ désignant une fonction prise à volonté, l'équation (4) se partage dans les deux suivantes :

$$(7) \quad (x - a) + (z - \psi)\frac{d\psi}{da} = 0, \quad (y - b) + (z - \psi)\frac{d\psi}{db} = 0;$$

et ces dernières déterminent a, b, et par suite c en fonction de x, y, z. On verra, comme dans le premier cas, que ces valeurs ne changent pas, si l'on donne aux variables des accroissements proportionnels à X, Y, Z ; ce qui mène ensuite aux mêmes résultats que dans le premier cas.

Soit, par exemple,

$$F = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2) - (x\cos\alpha + y\cos6 + z\cos\gamma)^2}.$$

En supposant

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

la fonction F satisfait à l'équation (2). Alors les équations (3) sont, en posant, pour abréger,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = P,$$

$$x - P\cos\alpha = x - a, \quad y - P\cos\beta = y - b, \quad z - P\cos\gamma = z - c,$$

Donc

$$a = P\cos\alpha, \quad b = P\cos\beta, \quad c = P\cos\gamma.$$

De sorte qu'on a ici un exemple du premier cas, savoir

$$a = \psi(c) = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}c, \quad b = \psi_1(c) = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}c.$$

On vérifie aisément que $c = P\cos\gamma$ ne change pas, si l'on substitue à x, y, z les valeurs $x + pX$, $y + pY$, $z + pZ$, c'est-à-dire

$$(m)\qquad \begin{cases} x + p\left(\dfrac{x - P\cos\alpha}{F}\right), \\ y + p\left(\dfrac{y - P\cos\beta}{F}\right), \\ z + p\left(\dfrac{z - P\cos\gamma}{F}\right). \end{cases}$$

Puis on vérifiera aussi aisément que F devient $F + p$, et que X, Y, Z ne changent pas pour ces nouvelles valeurs des variables.

Si l'on part des valeurs précédentes de a et b en fonction de c, afin de déduire de la solution complète la fonction F que nous avons prise pour exemple, l'équation (5) qui détermine c en fonction de x, y, z, donnera

$$\left(x - c\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + \left(y - c\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + (z - c) = 0,$$

et par suite

$$c = P\cos\gamma.$$

Cette équation ne change pas et donne, par conséquent, la même valeur pour c, si à x, y, z on substitue les valeurs (m), continuant à y considérer c comme l'inconnue à déterminer pour ces nouvelles valeurs des variables.

Soit, pour avoir un exemple du second cas,

$$F = \sin\alpha\sqrt{x^2+y^2} + z\cos\alpha,$$

qui satisfait encore à l'équation (2).

Après une simple réduction et posant

$$\cos\alpha\sqrt{x^2+y^2} - z\sin\alpha = P,$$

les équations (3) donneront

$$a = \frac{xP\cos\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad b = \frac{yP\cos\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad c = -P\sin\alpha,$$

de sorte qu'on a ici

$$c = \psi(a, b) = -\operatorname{tang}\alpha\sqrt{a^2+b^2}.$$

Si à x, y, z on substitue $x+pX$, $y+pY$, $z+pZ$, c'est-à-dire

$$(n) \qquad x + p\frac{x\sin\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad y + p\frac{y\sin\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z + p\cos\alpha,$$

on vérifie aisément que X, Y, Z ne changent pas, tandis que F devient $F+p$.

Si l'on part de la valeur précédente de c en fonction de a et b, les équations (7) deviennent

$$(x-a) - (z-\psi)\frac{a\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0,$$

$$(y-b) - (z-\psi)\frac{b\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0;$$

d'où premièrement $ay - bx = 0$. Ensuite on en déduira, après quelques réductions, les valeurs précédentes de a, b, c, en fonctions de x, y, z. Puis, si on y substitue à x, y, z les valeurs (n), continuant à considérer a et b

comme des inconnues à déterminer pour ces nouvelles valeurs de x, y, z, les premiers membres augmentent respectivement des termes

$$p \sin\alpha \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right],$$

$$p \sin\alpha \left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right],$$

qui s'avanouissent quand on donne à a, b les mêmes valeurs que celles trouvées d'abord. En sorte que les valeurs de a et b ne changent pas pour les nouvelles valeurs de x, y, z.

Pour obtenir les surfaces normales aux droites déterminées par les fonctions cosinus, X, Y, Z, il faudra éliminer x, y, z des équations (1) de l'article cité plus haut (*), c'est-à-dire des équations

$$\xi - x = (-F + C)\frac{dF}{dx},$$

$$\eta - y = (-F + C)\frac{dF}{dy},$$

$$\zeta - z = (-F + C)\frac{dF}{dz},$$

lesquelles, dans le premier cas, en vertu des relations (6), se réduisent à

$$(p) \quad \begin{cases} \xi - \psi(f) = \frac{C}{F}[x - \psi(f)], \\ \eta - \psi_1(f) = \frac{C}{F}[y - \psi_1(f)], \\ \zeta - f = \frac{C}{F}(z - f). \end{cases}$$

Or, si l'on multiplie la première et la seconde de ces

(*) Les équations (1) dont il s'agit sont (t. XI, p. 66) :

$$\xi - x = rX, \quad \eta - y = rY, \quad \zeta - z = rZ.$$

dernières équations respectivement par $\psi'(f)$ et $\psi'_1(f)$, la somme des produits et de la troisième donne, en vertu de la relation (5),

$$[\xi - \psi(f)]\psi'(f) + [\eta - \psi_1(f)]\psi'_1(f) + \zeta - f = 0,$$

où ψ et ψ_1 sont des fonctions connues en f; de sorte qu'on peut tirer de cette équation f, c'est-à-dire $f(x, y, z)$ en fonction de ξ, η, ζ, et comme l'équation (5) a donné, d'après ce qui précède,

$$c = f(x, y, z),$$

celle-ci donnera évidemment

$$f(x, y, z) = f(\xi, \eta, \zeta).$$

Ainsi, dans les premiers membres des équations (p), on peut changer x, y, z en ξ, η, ζ, parce que ces variables n'y entrent que sous le signe f; et après cela on élimine x, y, z de ces équations en prenant la somme de leurs carrés, ce qui donnera

$$[\xi - \psi(f)]^2 + [\eta - \psi_1(f)]^2 + (\zeta - f)^2 = C^2,$$

dont le premier membre n'est autre chose que le carré de la fonction F, où l'on a changé x, y, z en ξ, η, ζ.

On trouvera, d'une manière analogue, que de même dans le second cas l'équation de la surface normale est

$$F^2 = C^2, \quad \text{ou} \quad (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2 = C^2,$$

où l'on suppose que dans les fonctions a, b, c on a substitué ξ, η, ζ à x, y, z.

Si l'on prend la constante C égale à zéro, on aura, dans le premier cas, au lieu d'une surface une ligne normale, parce que $C = 0$ exige que chacun des trois termes de la somme des carrés soit séparément nul, et que les trois équations qu'on obtient ainsi se réduisent évidemment aux deux équations

$$\xi = \psi(\zeta), \quad \eta = \psi_1(\zeta).$$

Dans le second cas, ces trois équations se réduisent à

$$\zeta = \psi(\xi, \eta)$$

qui représente une surface ; l'une des trois équations

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c,$$

donnera également l'équation de cette surface.

Ces conclusions générales sont vérifiées par les deux exemples précédents.

On voit facilement que, dans le premier, le système de droites déterminées par les fonctions X, Y, Z qui se déduisent de F, est composé des perpendiculaires menées de chaque point de l'espace sur une droite passant par l'origine et faisant avec les axes des angles α, 6, γ. Le lieu normal à ces droites est généralement une surface cylindrique dont cette droite est l'axe, et qui devient cet axe lui-même lorsque le rayon du cylindre, c'est-à-dire la constante dans l'équation générale, est zéro.

Dans le second exemple, le système consiste en des droites menées de chaque point de l'espace à l'axe des z sous l'angle α ; le lieu normal est toujours un cône droit et circulaire, qui a son sommet à l'origine lorsque la constante est zéro, et on verra que, dans ce cas, l'équation de cette surface est en effet indifféremment $F = 0$, $\xi = a$, $\eta = b$, $\zeta = c$, en se rappelant que dans les valeurs de a, b, c, il faut changer x, y, z en ξ, η, ζ.

Note du Rédacteur. — Le remarquable article de M. Baehr se rapporte à la question suivante, proposée au Concours d'agrégation (année 1849) :

Étant données une surface, et par chaque point de cette surface une droite qui fait avec les axes rectangulaires des coordonnées des angles dont les cosinus sont des fonctions continues des coordonnées de ce point,

trouver la condition pour qu'il existe une surface normale à toutes ces droites.

La solution en a été donnée par M. Dieu (t. XI, p. 66-70). La condition cherchée consiste en ce que, si X, Y, Z représentent les cosinus en fonction des coordonnées :

Il faut et il suffit que le trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ *satisfasse à la condition connue d'intégrabilité des différentielles à trois variables, et que le facteur propre à le rendre intégrable soit, en vertu de l'équation de la surface donnée, une fonction de l'intégrale.* G.

RÉPONSE A UNE LETTRE SUR CETTE QUESTION :

Construire un triangle semblable à un triangle donné ABC, *et dont les trois sommets soient situés sur une hyperbole donnée.*

Voici une solution : D'un point quelconque a pris sur l'hyperbole, menez deux cordes ab, ac faisant entre elles un angle bac égal à l'angle BAC du triangle donné. Par le centre o de la courbe et les milieux m, n des cordes ab, ac, conduisez les diamètres omx, ony. Cela fait, prenez à partir des points m, n sur les droites ma, na des longueurs mb', nc' proportionnelles aux côtés AB, AC du triangle BAC; et par les points b', c', menez aux diamètres ox, oy des parallèles qui iront se rencontrer en un point F. Unissez ensuite le centre au point F par une droite oF que vous prolongerez, s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'hyperbole en un point A' qui sera le sommet du triangle cherché, homologue au sommet A du triangle donné. Pour déterminer les deux autres sommets B', C',

il suffira de mener par A′ des cordes A′B′, A′C′ respectivement parallèles à *ab*, *ac*. Les deux triangles A′B′C′, ABC seront semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

La question proposée peut admettre une infinité de solutions. G.

RECTIFICATION;

Par M. NICOLAÏDÈS.

« Dans le numéro de décembre, à la fin de mon ar-
» ticle (p. 466), on lit : L'équation différentielle

$$(6)\qquad \left(x\frac{dy^2}{dx^2}-y\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2=A\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)^2$$

» représente les courbes que le centre du cercle va-
» riable doit décrire pour que son enveloppe soit un
» cercle »; il faut ajouter : « ayant pour centre le point
» fixe. »

Dans le cas où le centre du cercle enveloppe est un point quelconque, l'équation (6) devient

$$4\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2-2\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\left(2C\frac{dy}{dx}-2B\right)$$
$$+(B^2+C^2-4A)\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)=0,$$

B, C sont les coordonnées du centre, $2\sqrt{A}$ le rayon. Cette équation représente un système de droites enveloppant une conique dont les foyers sont les points (o, o), (B, C).

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 632;

PAR M. ALBIN LAVAL,
Élève du lycée de Lyon.

ÉNONCÉ. — *On prend le sommet d'un des trois angles dont les côtés réunissent deux à deux quatre points donnés d'une conique, et l'on cherche par rapport aux côtés de cet angle la conjuguée harmonique de la droite qui joint ce sommet au centre de la conique; démontrer que cette conjuguée harmonique et les deux autres droites analogues sont parallèles.* (HOUSEL.)

LEMME I. — *Les six points de rencontre d'une transversale quelconque avec une conique et les côtés d'un quadrilatère inscrit sont en involution.* (Cette proposition est énoncée dans les *Leçons nouvelles de Géométrie* de M. Amiot, dans le cas de la circonférence.) (*) On passe de là à une conique quelconque, en remarquant que, dans la projection perspective, le système des points analogues jouit de la même propriété d'être en involution.

LEMME II. — *Les six points de rencontre d'une transversale quelconque avec les côtés d'un quadrilatère et les diagonales intérieures sont en involution* (**). (*Leçons nouvelles* de M. Amiot.)

(*) Elle est démontrée dans la *Géométrie supérieure* de M. Chasles (p. 464) et dans le *Complément de Géométrie analytique* de M. Page (liv. III, p. 79). C'est le théorème de Desargues sur l'involution.

(**) Le lemme II est, comme le précédent, un cas particulier de cette proposition générale démontrée par Sturm (*Annales de Mathématiques* de Gergonne, t. XVII, p. 180) : *Quand trois lignes du second degré ont quatre points communs, toute transversale les coupe en six points, en involution.* G.

Cela posé, soient O le centre de la conique; A, B, C, D les quatre points donnés; E le point de rencontre des côtés opposés AD, BC du quadrilatère inscrit ABCD; F le point de rencontre des deux autres côtés opposés, AB, CD; et G celui des deux diagonales AC, BD.

Désignons par ET la conjuguée harmonique de EO par rapport aux deux droites EAD, EBC, et menons par le centre O une parallèle à cette conjuguée, parallèle qui coupe les côtés EAD, EBC en M et N. Il résulte d'une propriété connue du faisceau harmonique que OM = ON. Soient P et Q les points où la parallèle menée, MN, coupe les diagonales AC, BD, et H, K ceux où elle coupe la conique. Les six points M, N, P, Q, H, K sont en involution (Lemme I), et comme OM = ON et OH = OK, on aura OP = OQ (*). Ainsi, la droite PQ est partagée en deux parties égales par GO, d'où il faut conclure que la conjuguée harmonique de GO, par rapport aux droites GC, GD, est parallèle à PQ, et par suite à ET.

On démontrerait de même que la conjuguée harmonique de FO, par rapport aux côtés FAB, FDC, est parallèle à PQ. Mais on abrége la démonstration en remarquant que si R, S sont les points où MN prolongée rencontre les droites FAB, FDC, les six points R, S, M, N, P, Q sont en involution (Lemme II); et de ce que OM = ON, OP = OQ, on conclura, comme précédemment, que OR = OS. Cette dernière égalité montre que la conjuguée de FO, par rapport à FB, FC, est parallèle à RS, et par suite à ET. Donc les trois conjuguées harmoniques sont parallèles entre elles.

(*) Lorsque trois couples de points sont en involution, si deux des trois segments qui leur correspondent ont leurs milieux au même point, ce point sera aussi le milieu du troisième segment. Quant au point central de l'involution, il est alors à l'infini. G.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 632;

PAR M. L. P.,
Elève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Considérons l'un des trois angles dont les côtés réunissent deux à deux quatre points A, B, C, D donnés sur un plan, et cherchons, par rapport aux côtés de cet angle, la conjuguée harmonique de la droite menée de son sommet à un point M du même plan.

Nous exprimerons que cette conjuguée et les deux autres droites analogues sont parallèles, et nous serons conduits, comme conclusion, au théorème (632).

Il suffit évidemment d'écrire que deux quelconques de ces droites sont parallèles.

Je prends pour axes des coordonnées x, y deux côtés opposés AB, CD du quadrilatère ABCD; ces deux côtés se coupent en un point O qui sera l'origine.

Les deux autres côtés opposés AC, BD se rencontrent en un point O'; et si l'on désigne par a, a', b, b' les distances OA, OB, OC, OD, les côtés O'CA, O'DB de l'angle O' auront pour équations

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)=0, \quad \left(\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}-1\right)=0.$$

Soient x_1, y_1 les coordonnées de M, l'équation de la conjuguée harmonique de OM, par rapport aux axes OX, OY, est

(1) $$y_1x+x_1y=0 \quad (*).$$

(*) Deux conjuguées harmoniques par rapport aux deux côtés d'un angle sont des diamètres conjugués de la ligne formée du système des

La conjuguée harmonique de O′M, par rapport aux côtés de l'angle O′, a pour équation

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{x_1}{a'}+\frac{y_1}{b'}-1\right) \\ +\left(\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}-1\right)\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}-1\right)=0 \quad (*). \end{cases}$$

La condition du parallélisme de ces deux droites est

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{a}\left(\frac{x_1}{a'}+\frac{y_1}{b'}-1\right)+\frac{1}{a'}\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}-1\right)}{y_1} \\ =\dfrac{\frac{1}{b}\left(\frac{x_1}{a'}+\frac{y_1}{b'}-1\right)+\frac{1}{b'}\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}-1\right)}{x_1}, \end{cases}$$

ou, en réduisant,

$$(4)\quad \begin{cases} \left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}-1\right)\left(\frac{x_1}{a'}-\frac{y_1}{b'}\right) \\ +\left(\frac{x_1}{a'}+\frac{y_1}{b'}-1\right)\left(\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}\right)=0. \end{cases}$$

L'équation (3) ou (4) est précisément celle du lieu géométrique des centres des coniques passant par les quatre points donnés, en considérant x_1, y_1 comme des cordonnées variables. Donc les centres de ces coniques jouissent de la propriété énoncée, et ce sont les seuls points qui en jouissent.

La proposition 632 est, par conséquent, démontrée.

---

deux côtés de l'angle. Il en résulte que si l'on prend ces côtés pour axes de coordonnées, la somme des coefficients angulaires des deux conjuguées harmoniques sera nulle.

(*) En général, si $M=0$, $N=0$ sont les équations des deux côtés d'un angle et $M+\gamma N=0$ l'équation d'une droite quelconque menée par son sommet, la conjuguée harmonique de cette droite par rapport aux côtés de l'angle aura pour équation $M-\gamma N=0$. On le voit facilement en prenant pour axes les deux côtés de l'angle. G.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE D'UNE QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION POUR LES LYCÉES (ANNÉE 1862);

PAR M. L. P.,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Étant données deux droites non situées dans le même plan, on fait passer par ces droites un paraboloïde hyperbolique auquel on mène un plan tangent parallèle à un plan fixe et donné : on demande le lieu du point de contact.

Soient D, D′ et P les deux droites et le plan donnés; P′ un plan parallèle aux deux droites D, D′; et M le point de contact d'un plan parallèle à P et de l'un des paraboloïdes hyperboliques passant par les deux droites données.

Si l'on mène par le point M deux génératrices rectilignes de ce paraboloïde, elles appartiendront au plan tangent et seront, par conséquent, parallèles toutes deux au plan P. L'une d'elles, AMA′, coupera les droites D et D′ en des points A, A′; l'autre, MN, parallèle à la fois aux plans P, P′, sera parallèle à leur intersection. Le paraboloïde qui donne le point M du lieu est déterminé par les trois génératrices rectilignes D, D′, MN.

Tout point M_1 de AA′ appartient au lieu cherché; car si l'on désigne par M_1N_1 une parallèle à l'intersection des plans P, P′, on pourra faire passer un paraboloïde hyperbolique par les trois droites D, D′, M_1N_1; et le plan des deux droites AA′, M_1N_1, parallèle à P, sera tangent en M_1 à ce paraboloïde.

Ainsi, le lieu cherché est la surface engendrée par une

droite AA′ qui s'appuie sur deux droites D, D′ non situées dans un même plan, en restant constamment parallèle à un plan donné P. C'est donc un paraboloïde hyperbolique dont les plans directeurs sont parallèles à P et à P′.

Remarque. — On voit facilement que le lieu se forme du système de deux plans qui se coupent et passent, respectivement, par D et D′, lorsque l'intersection des plans P et P′ est parallèle à l'une de ces droites ; et que le lieu se compose du système de deux plans parallèles, quand les plans P et P′ sont parallèles entre eux.

SOLUTION DE LA QUESTION 628;

PAR MM. L. ANDLAUER ET G. CHAUVEAU,
Élèves en Mathématiques spéciales.

Étant donné un tétraèdre quelconque, on peut faire passer par les centres de gravité des quatre faces un ellipsoïde tangent à ces mêmes faces. Il aura pour centre le centre de gravité du tétraèdre. Et si on appelle $3a$, $3b$, $3c$ *les arêtes adjacentes à un même angle solide, qu'on prenne des axes parallèles à ces arêtes, et pour origine le centre de gravité du tétraèdre, l'équation de la surface tangente sera*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2+\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}=\frac{3}{8}.$$

(VANNSON.)

Prenons pour axes des coordonnées x, y, z, trois arêtes adjacentes du tétraèdre, dont les longueurs seront désignées par $3a$, $3b$, $3c$.

Pour qu'une surface du second degré,

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

soit tangente aux trois faces du tétraèdre, prises pour plans de coordonnées, et aux centres de gravité de ces faces, dont les coordonnées sont

$$(x = 0,\ y = b,\ z = c),$$
$$(y = 0,\ z = c,\ x = a),$$
$$(z = 0,\ x = a,\ y = b),$$

il faut que les coefficients, A, A', etc., satisfassent aux conditions suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} Aa + B''b + C = 0, \\ A'b + B''a + C' = 0, \\ Ca + C'b + D = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} Aa + B'c + C = 0, \\ A''c + B'a + C'' = 0, \\ Ca + C''c + D = 0, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} A'b + Bc + C' = 0, \\ A''c + Bb + C'' = 0, \\ C'b + C''c + D = 0. \end{cases}$$

C'est ce qu'on trouve facilement par la considération de l'équation générale des plans tangents aux surfaces du second degré.

Les dernières équations des systèmes (1), (2), (3) donnent

$$C = -\frac{D}{2a},\quad C' = -\frac{D}{2b},\quad C'' = -\frac{D}{2c}.$$

En cherchant, de même, les conditions pour que la surface du second degré soit tangente à la quatrième

face du tétraèdre, représentée par

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-3=0,$$

et à son centre de gravité dont les coordonnés sont

$$x=a, \quad y=b, \quad z=c,$$

on trouve, en ayant égard aux équations qui précèdent :

$$(4) \qquad B=\frac{D}{6.bc}, \quad B'=\frac{D}{6.ac}, \quad B''=\frac{D}{6.ab}.$$

Et, au moyen des expressions de C, C′, C″, B, B′, B″ en fonction de D, les équations (1), (2), (3) donnent

$$A=\frac{D}{3a^2}, \quad A'=\frac{D}{3b^2}, \quad A''=\frac{D}{3c^2}.$$

Ces valeurs de A, A′, A″, B, B′, B″, C, C′, C″ vérifient toutes les équations de conditions obtenues, quel que soit D qui reste indéterminé.

En remplaçant les coefficients A, A′,..., C′, C″, par leurs valeurs, dans l'équation

$$\begin{gathered}Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy\\+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,\end{gathered}$$

il en résulte

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}+\frac{xy}{ab}-\frac{3x}{a}-\frac{3y}{b}-\frac{3z}{c}+3=0,$$

équation qui représente un ellipsoïde réel.

Les coordonnées du centre de cette surface sont données par les équations

$$\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-3=0,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{2y}{b}+\frac{z}{c}-3=0,$$

et

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{2z}{c}-3=0.$$

On voit que les coordonnées du centre de gravité, qui sont

$$x=\frac{3a}{4},\quad y=\frac{3b}{4},\quad z=\frac{3c}{4},$$

satisfont à ces équations.

Au reste, si on rapporte la surface à son centre, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}+\frac{xy}{ab}=\frac{3}{8}.$$

Note du Rédacteur. — M. Lignières a résolu la même question par un calcul qui diffère peu du précédent.

NOTE
Sur l'emploi des imaginaires dans la recherche des fonctions primitives de quelques fonctions dérivées ;

PAR M. HENRI MARTIN,
Élève en mathématiques spéciales (institution Barbet).

Exemple Ier. — Considérons la fonction dérivée $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On a $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(x\sqrt{-1})^2}}$. Mais $\frac{1}{\sqrt{1-(x\sqrt{-1})^2}}$ est le produit de $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ par la dérivée de $\arcsin(x\sqrt{-1})$. Donc la fonction primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est représentée par

$$\frac{\arcsin(x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}+C.$$

La question est donc ramenée à évaluer cette dernière fonction.

Or, de la formule d'Euler :

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}.\sin y,$$

on tire

$$y = \frac{L\left(\cos y + \sqrt{-1}\sin y\right)}{\sqrt{-1}},$$

et, en posant

$$\sin y = x\sqrt{-1},$$

il vient

$$\text{arc}\sin x\sqrt{-1} = \frac{L(\sqrt{1+x^2} - x)}{\sqrt{-1}},$$

d'où

$$\frac{\text{arc}\sin x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = -L(\sqrt{1+x^2} - x) = L(\sqrt{1+x^2} + x).$$

Par conséquent la fonction primitive cherchée est

$$L(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

Exemple II. — Soit $\sqrt{1+x^2}$ la dérivée proposée.

En remplaçant x par $x\sqrt{-1}$, elle devient $\sqrt{1-x^2}$, expression de l'ordonnée correspondante à l'abscisse x dans le cercle $y^2 + x^2 = 1$. Il en résulte que $\sqrt{1-x^2}$ est la dérivée du segment de cercle compris entre l'axe des y et l'ordonnée correspondante à l'abscisse x, segment qui est égal à

$$\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \text{arc}\sin x).$$

D'où il suit que $\sqrt{1+x^2}$ est la dérivée de

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(x\sqrt{-1}.\sqrt{1+x^2} + \text{arc}\sin x\sqrt{-1})$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \frac{\text{arc}\sin x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\right).$$

Mais

$$\frac{\text{arc sin}\,(x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} = \mathrm{L}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad (\textit{Ex. I}^{er}.)$$

donc la fonction primitive de $\sqrt{1+x^2}$ est

$$\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \mathrm{L}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] + \mathrm{C}.$$

Exemple III. — Considérons la fonction dérivée $\mathrm{L}(1+x^2)$.

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(1+x^2) &= \mathrm{L}\left(1+x\sqrt{-1}\right)\left(1-x\sqrt{-1}\right) \\ &= \mathrm{L}\left(1+x\sqrt{-1}\right) + \mathrm{L}\left(1-x\sqrt{-1}\right). \end{aligned}$$

Or, la fonction primitive de $[\mathrm{L}f(x)]f'(x)$ est, comme on sait, $f(x).\mathrm{L}f(x) - f(x) + \mathrm{C}$; donc, en négligeant les constantes, la fonction primitive de

$$\mathrm{L}\left(1+x\sqrt{-1}\right) + \mathrm{L}\left(1-x\sqrt{-1}\right)$$

sera

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{-1}}\left[(1+x\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{L}\left(1+x\sqrt{-1}\right) - x\sqrt{-1}\right. \\ &\left. - \left(1-x\sqrt{-1}\right)\mathrm{L}\left(1-x\sqrt{-1}\right) - x\sqrt{-1}\right], \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{-1}}\left[\mathrm{L}\left(1+x\sqrt{-1}\right) - \mathrm{L}\left(1-x\sqrt{-1}\right)\right] \\ &+ x\left[\mathrm{L}\left(1+x\sqrt{-1}\right) + \mathrm{L}\left(1-x\sqrt{-1}\right)\right] - 2x. \end{aligned}$$

Si nous remplaçons $\mathrm{L}\left(1+x\sqrt{-1}\right)$, $\mathrm{L}\left(1-x\sqrt{-1}\right)$, par leurs expressions connues :

$$\mathrm{L}\left(\sqrt{1+x^2}\right) + \sqrt{-1}\,\text{arc tang}\,x,$$
$$\mathrm{L}\left(\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{-1}\,\text{arc tang}\,x,$$

la fonction obtenue devient

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(2\sqrt{-1}\ \text{arc tang}\, x\right) + x\left(2 . \text{L}\sqrt{1 + x^2}\right) - 2x,$$

ou

$$2 . \text{arc tang}\, x + x . \text{L}(1 + x^2) - 2x + \text{C},$$

qui est la fonction primitive cherchée.

SOLUTION DE LA QUESTION 474 (*);

PAR M. GUSTAVE HARANG,
Élève du lycée de Douai (classe de M. Painvin).

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & a_1 - b_3 & \ldots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & a_2 - b_3 & \ldots & a_2 - b_n \\ a_3 - b_1 & a_3 - b_2 & a_3 - b_3 & \ldots & a_3 - b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & a_n - b_3 & \ldots & a_n - b_n \end{vmatrix}$$

est égal à $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$ pour $n = 2$; et pour $n > 2$, il est nul.

Soit $n = 2$, le déterminant devient

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 - b_1 & a_1 - b_2 \\ b_2 - b_1 & a_2 - b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a_1 - a_2 \\ b_2 - b_1 & a_2 - b_2 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2).$$

(*) La question 622, dont MM. Gustave Harang et Albert Sartiaux nous ont adressé une solution, a été résolue, il y a six mois, par M. Bartet (*voir* le numéro d'août 1862, p. 312).

Supposons maintenant $n > 2$.

Retranchons la seconde colonne de la première, et la troisième de la seconde, il viendra

$$\begin{vmatrix} b_2 - b_1 & b_3 - b_2 & a_1 - b_3 & \cdots & a_1 - b_n \\ b_2 - b_1 & b_3 - b_2 & a_2 - b_3 & \cdots & a_2 - b_n \\ b_2 - b_1 & b_3 - b_2 & a_3 - b_3 & \cdots & a_3 - b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2 - b_1 & b_3 - b_2 & a_n - b_3 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix}$$

$$= (b_2 - b_1)(b_3 - b_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_1 - b_3 & \cdots & a_1 - b_n \\ 1 & 1 & a_2 - b_3 & \cdots & a_2 - b_n \\ 1 & 1 & a_3 - b_3 & \cdots & a_3 - b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & a_n - b_3 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix} = 0;$$

ce dernier déterminant, ayant deux colonnes égales, est identiquement nul.

Note. — La même question a été résolue par M. Abraham Schnée, élève du lycée Charlemagne.

SOLUTION DE LA QUESTION 576;

PAR M. MOGNI,
Professeur à Tortone.

Soient C *le centre,* F, F_1 *les foyers et* P *un point quelconque d'une ellipse de Cassini; qu'on décrive un cercle passant par* F, F_1 *et* P, *et supposons que la normale à la courbe au point* P *rencontre ce cercle en un second point* N : *alors on aura cette relation*

$$\text{CP} \times \text{PN} = \text{constante}.$$

Posons PF $= f$, PF$_1 = f_1$, l'équation de la *cassinienne*, exprimée au moyen des distances f, f_1, sera $f.f_1 = a$, a étant une constante.

Différentiant cette équation, on obtient

$$f.df_1 + f_1.df = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{df}{df_1} = -\frac{f}{f_1}.$$

On déduit immédiatement de cette relation que :

1° La tangente au point P de la courbe divise l'angle formé par l'un des rayons vecteurs avec le prolongement de l'autre en deux parties dont les cosinus sont entre eux comme les rayons vecteurs contigus.

2° Conséquemment, la normale au point P de la courbe divise l'angle des rayons vecteurs en parties dont les sinus sont entre eux comme les rayons vecteurs contigus. On aura donc

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\sin \text{NPF}}{\sin \text{NPF}_1}.$$

Dans le triangle FPF$_1$ la droite PC qui unit le sommet P au milieu C du côté opposé, divise l'angle FPF$_1$ en deux parties dont les sinus sont inversement proportionnels aux côtés adjacents ; donc

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\sin \text{CPF}_1}{\sin \text{CPF}}.$$

On déduit de ce qui précède

$$(1) \qquad \widehat{\text{NPF}} = \widehat{\text{CPF}_1}, \quad \widehat{\text{NPF}_1} = \widehat{\text{CPF}}.$$

Menons NF, NF$_1$ et posons

$$\text{NF} = h, \quad \text{NF}_1 = k, \quad \text{FF}_1 = 2c, \quad \text{PN} = n, \quad \text{PC} = m,$$

et soit R le rayon du cercle circonscrit.

Par une propriété du quadrilatère inscrit, on a

$$(2) \qquad f.k + f_1.h = 2c.n.$$

Mais on a

$$\sin \mathrm{NPF} = \frac{h}{2\mathrm{R}},$$

et dans le triangle $\mathrm{F}_1\mathrm{PC}$

$$\sin \mathrm{F}_1\mathrm{PC} = \frac{c}{m} \sin \mathrm{FF}_1\mathrm{P} = \frac{c}{m} \cdot \frac{f}{2\mathrm{R}} = \frac{cf}{2\mathrm{R}m}.$$

En ayant égard aux relations (1), on obtient

$$\frac{h}{2\mathrm{R}} = \frac{c.f}{2\mathrm{R}m} \quad \text{d'où} \quad h = \frac{cf}{m}.$$

En opérant semblablement par rapport à k, on trouve

$$k = \frac{cf_1}{m}.$$

Substituant dans l'équation (2) les valeurs de h et k ainsi obtenues, et réduisant, on trouve la relation cherchée

$$f.f_1 = m.n = a.$$

C. Q. F. D.

QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE AU CONCOURS DE L'AGRÉGATION (1862);

SOLUTION DE M. AUDOYNAUD,
Professeur au lycée de Poitiers.

Trouver la ligne qui coupe sous un angle constant tous les méridiens d'une sphère. — Rectifier la courbe. — Trouver sa projection orthographique et sa projection stéréographique.

1. Le méridien PA (*) a pour équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad y = mx.$$

Alors, si x', y', z' sont les coordonnées d'un point quelconque M du lieu, la tangente en M au méridien sera représentée par

$$x - x' = -\frac{z'}{(1 + m^2)}(z - z'),$$

$$y - y' = -\frac{m^2 z'}{(1 + m^2)y'}(z - z').$$

Donc en appelant a le cosinus de l'angle constant, on aura, en supprimant les accents,

$$\frac{-\frac{dx}{dz}\frac{z}{(1 + m^2)x} - \frac{dy}{dz}\frac{m^2 x}{(1 + m^2)y} + 1}{\sqrt{\frac{dx^2}{dz^2} + \frac{dy^2}{dz^2} + 1}\sqrt{\frac{z^2}{(1 + m^2)^2 x^2} + \frac{m^4 z^2}{(1 + m^2)} + 1}} = a.$$

En remplaçant m par $\frac{y}{x}$ et faisant usage de l'équation de la sphère et de son équation différentielle

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

il vient

$$(1) \qquad ds = \frac{R}{a}\frac{dz}{\sqrt{R^2 - z^2}},$$

qui, jointe à l'équation de la sphère, donne la *loxodro-*

(*) On est prié de faire la figure. POP' est le diamètre commun aux méridiens considérés; PMA un méridien rencontrant au point A l'équateur EAE'. La droite MI est perpendiculaire sur le rayon OA au point i. La droite MP' rencontre OA au point k.

mie. En l'intégrant, on obtient

$$s = \frac{R}{a} \arc\sin\frac{z}{R} + C.$$

On voit que la courbe est rectifiable (*).

Si l'on compte les arcs à partir de $z = z_0$, on aura

$$s = \frac{R}{a}\left(\arc\sin\frac{z}{R} - \arc\sin\frac{z_0}{R}\right).$$

Remarque. — Si l'angle constant est de 90°, $a = 0$, alors $z = z_0$. Donc la courbe cherchée est l'intersection de la sphère par un plan parallèle au plan des xy, c'est-à-dire un *parallèle*, si ce dernier est l'équateur.

2. Cherchons maintenant l'équation de la courbe en coordonnées polaires.

Posons

$$\text{angle MOI} = \theta, \quad \text{angle IOE} = \varphi.$$

Alors

$$z = R\sin\theta, \quad ds^2 = R^2\left(\cos^2\theta\,\overline{d\varphi}^2 + \overline{d\theta}^2\right),$$

et l'équation (1) devient

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\,\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

D'où, en intégrant

$$\varphi = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\,\mathrm{L}\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + \text{constante},$$

ou

$$(2) \qquad \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = Ce^{\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\varphi} = Ce^{\varphi\cot\alpha},$$

en appelant α l'angle donné.

(*) C'est-à-dire que sa rectification se ramène à celle d'un arc de cercle.

Cette équation, considérée simultanément avec celle de la sphère, donne une spirale sphérique.

3. *Projection orthographique* sur l'équateur.

Posons

$$OI = r,$$

on aura

$$r = R\cos\theta.$$

Mais en désignant par M la quantité $Ce^{\varphi\cot\alpha}$, on a

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}} = M,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \frac{1 - M}{1 + M},$$

et par suite

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1 - M}{\sqrt{2(1 + M^2)}}, \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1 + M}{\sqrt{2(1 + M^2)}},$$

$$\sin\theta = \frac{1 - M^2}{1 + M^2}, \qquad \cos\theta = \frac{2M}{1 + M^2};$$

donc

$$(3) \qquad r = 2R\frac{M}{1 + M^2} = 2R\frac{Ce^{\varphi\cot\alpha}}{1 + C^2e^{2\varphi\cot\alpha}}.$$

4. *Projection stéréographique.*

Menons la droite MP' qui rencontre O*i* en *k*, et posons

$$Ok = r'.$$

On aura

$$r' = R\operatorname{tang}OP'M = R\operatorname{tang}\frac{1}{2}POM = R\operatorname{tang}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2}\right) = R.M,$$

d'où

$$(4) \qquad r' = C.Re^{\varphi\cot\alpha}.$$

C'est une spirale logarithmique

Remarque. — En appelant μ l'angle que le rayon r' fait avec la tangente à la courbe (4), on trouve

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{1}{\cot\alpha} = \operatorname{tang}\alpha, \quad \mu = \alpha.$$

C'est ce qu'on pouvait prévoir, puisqu'on démontre que l'angle de deux courbes tracées sur la sphère est égal à celui de leurs projections stéréographiques; or le méridien et la loxodromie font un angle α, donc leurs projections stéréographiques, c'est-à-dire r' et la tangente à la courbe (4), doivent faire le même angle.

5. Si l'on veut les équations de la loxodromie en coordonnées rectilignes, on remarque que de $\sin\theta = \frac{1 - M^2}{1 + M^2}$, on déduit $M = \sqrt{\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}}$; mais $z = R\sin\theta$, donc

$$M = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{R - z}{\sqrt{R^2 - z^2}}.$$

D'ailleurs

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x};$$

alors, en substituant dans l'équation (2), on obtient

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\left(Ce^{\cot\alpha \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}} + \frac{1}{C}e^{-\cot\alpha \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}}\right) = 2R,$$

équation qui jointe à $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ détermine la courbe demandée.

SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE QUELQUES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES;

PAR M. V.-A. LE BESGUE,
Correspondant de l'Institut.

I.

1. Il est établi dans cette Note :

1° Que le nombre $m^4 + 14m^2n^2 + n^4$ ne saurait être carré si l'on suppose m pair et n impair.

2° Comme conséquence, que $x^2 + 4y^2$, $x^2 + y^2$ ne peuvent être simultanément des carrés, x est supposé impair et y pair.

3° Que le produit $p(p+q)(p+2q)(p+3q)$ ne saurait être un carré. Le cas principal est celui-ci : quatre carrés ne peuvent être en progression arithmétique.

4° Le nombre $m^4 + 14m^2n^2 + n^4$ ne peut être carré, même en supposant m et n impairs.

5° Le nombre $m^4 - m^2n^2 + n^4$ ne saurait être un carré.

Il va sans dire qu'on laisse de côté en 1° les solutions $m = 0$, $n = 1$; en 4° la solution $m = n = 1$; en 5° les solutions $m = 0$, $n = 1$; $n = 0$, $m = 1$.

La démonstration s'appuie sur la résolution de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

où x, y, z sont premiers deux à deux. L'inconnue paire du premier membre est nécessairement divisible par 4,

de sorte qu'en mettant l'équation sous la forme

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{z^2 - x^2}{4} = \frac{z+x}{2}\cdot\frac{z-x}{2} = p^2q^2,$$

p et q sont premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair, et l'on a nécessairement

$$y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2, \quad x = p^2 - q^2.$$

On établirait de même qu'on peut prendre

$$y = \frac{r^2 - s^2}{2}, \quad x = rs, \quad z = \frac{r^2 + s^2}{2},$$

r et s étant des nombres impairs premiers entre eux. On passerait de ces formules aux précédentes en posant

$$r + s = 2p, \quad r - s = 2q,$$

d'où

$$r = p + q, \quad s = p - q.$$

II.

THÉORÈME. — *L'équation*

$$r^2 = m^4 + 14m^2n^2 + n^4,$$

où m et n sont des nombres premiers entre eux, m étant pair et n impair, est impossible.

Démonstration. — On posera $m = 2^a p$, le nombre p étant impair, et on reconnaîtra 1° que l'équation est impossible pour $a = 1$, et 2° que pour $a > 1$ on tombe forcément sur une équation

$$r'^2 = m'^4 + 14m'^2n'^2 + n'^4,$$

où l'on a $m' = 2p'$, et p' impair, ce qui est impossible par 1°. De sorte que l'impossibilité aura encore lieu pour $a > 1$.

1° On a

$$r^2 = 2^{4a}p^4 + 2^{2a+1}7p^2n^2 + n^4 = (2^{2a}p^2 + 7n^2)^2 - 48n^4,$$
$$(2^{2a}p^2 + 7n^2 + r)(2^{2a}p^2 + 7n^2 - r) = 48n^4 = 3.2^4n^4.$$

Or, des deux facteurs

$$2^{2a}p^2 + 7n^2 + r, \quad 2^{2a}p^2 + 7n^2 - r,$$

un seul peut être divisible par 3; car autrement, n serait divisible par 3, les nombres

$$2^{2a}p^2 + r, \quad 2^{2a}p^2 - r$$

le seraient, par suite p et r, ce qui n'est pas.

On prouve de même qu'aucun facteur de n n'est commun aux nombres

$$2^{2a}p^2 + 7n^2 + r, \quad 2^{2a}p^2 + 7n^2 - r.$$

Comme ces deux nombres sont pairs et que leur différence est $2r$, l'un sera divisible par 2 et l'autre par 8; on aura les décompositions suivantes :

$$2^{2a}p^2 + 7n^2 \pm r = 2r^4, \quad = 6r^4, \quad n = rs,$$
$$2^{2a}p^2 + 7n^2 \mp r = 24s^4, \quad = 8s^4,$$

on suppose r et s premiers entre eux.

La première décomposition donne, par addition,

$$2^{2a}p^2 = r^4 - 7r^2s^2 + 12s^4 = 8k + 6,$$

équation impossible.

La deuxième décomposition donne, par addition,

$$2^{2a}p^2 = 3r^4 - 7r^2s^2 + 4s^4 = (3r^2 - 4s^2)(r^2 - s^2)$$
$$= (4s^2 - 3r^2)(s^2 - r^2).$$

Comme r et s sont impairs, $r^2 - s^2$ est divisible par 8; donc l'équation est impossible pour $a = 1$.

2° Pour $a > 1$, comme les facteurs $4s^2 - 3r^2$, $s^2 - r^2$ donnent

$$4s^2 - 3r^2 - 3(s^2 - r^2) = s^2,$$

on voit qu'ils sont premiers entre eux : chacun d'eux doit donc être carré. Or

$$3r^2-4s^2=4k-1$$

ne saurait être carré; il faudra donc prendre

$$2^{2a}p^2=(s^2-r^2)(4s^2-3r^2).$$

Or, pour rendre carré s^2-r^2, s et r étant impairs, il faut faire

$$s=t^2+u^2,\quad r=t^2-u^2,$$

d'où

$$s^2-r^2=4t^2u^2;$$

de plus

$$\begin{aligned}4s^2-3r^2&=4(t^4+2t^2u^2+u^4)-3(t^4-2t^2u^2+u^4)\\&=t^4+14t^2u^2+u^4;\end{aligned}$$

il vient donc

$$2^{2(a-1)}p^2=t^2u^2(t^4+14t^2u^2+u^4),$$

l'un des nombres t, u, étant pair et l'autre impair. Si t est pair, on a donc

$$t=2^{a-1}v,$$

v impair.

En continuant de même, on aura à rendre carré

$$x^4+14x^2y^2+y^4,$$

où x est pair et y impair, x n'étant pas divisible par 4; or cela a été prouvé impossible.

Corollaire. — On ne peut rendre simultanément carrés x^2+y^2, x^2+4y^2, x étant impair et y pair; il faut poser

$$x=m^2-n^2,\quad y=2mn$$

pour avoir x^2+y^2 carré; alors x^2+4y^2 devient

$$m^4+14m^2n^2+n^4,$$

où l'une des inconnues m, n, est paire.

III.

L'équation

$$z^2 = x^4 + 14x^2y^2 + y^4$$

étant reconnue généralement impossible pour le cas de x pair, il sera facile de montrer l'impossibilité de l'équation

$$p(p+q)(p+2q)(p+3q) = r^2.$$

Il faut pour cela distinguer plusieurs cas, qui résultent des remarques suivantes

1° On peut supposer p et q premiers entre eux, car si p et q avaient le facteur commun θ, le premier membre serait divisible par θ^4, et par suite r par θ^2. On peut donc faire disparaître θ.

2° Deux facteurs consécutifs sont premiers entre eux, autrement p et q ne le seraient pas.

3° Le facteur commun à deux facteurs séparés par un troisième ne peut être que 2.

4° Le facteur commun à p et $p+3q$ ne peut être que 3.

5° Si deux facteurs sont pairs, ils ne sauraient être l'un et l'autre divisibles par 4. Autrement p et q seraient pairs.

6° Si p et $p+3q$ sont divisibles par 3, ils ne sauraient être tous deux divisibles par 9. Autrement p et q seraient tous deux divisibles par 3.

Il y a donc à considérer les six cas suivants :

1er cas. p et q impairs,	p non multiple de 3.
2e cas. p et q impairs,	p multiple de 3.
3e cas. p pair, q impair,	p non multiple de 3.
4e cas. p pair, q impair,	p multiple de 3.
5e cas. p impair, q pair,	p multiple de 3.
6e cas. p impair, q pair,	p non multiple de 3.

Dans le 1[er] cas, il faut poser

$$p = r^2, \quad p + q = 2s^2, \quad p + 2q = t^2, \quad p + 3q = 2u^2,$$

de là

$$q = 2s^2 - r^2, \quad p + 2q = 4s^2 - r^2 = t^2,$$

ou

$$4s^2 = r^2 + t^2,$$

équation impossible, le deuxième membre n'étant pas divisible par 4.

Dans le 2[e] cas, il faut poser

$$p = 3r^2, \quad p + q = 2s^2, \quad p + 2q = t^2; \quad p + 3q = 6u^2;$$

de là

$$q = 2u^2 - r^2, \quad p + q = 2s^2 = 2u^2 + 2r^2,$$

ou

$$s^2 = u^2 + r^2, \quad p + 2q = 4u^2 + r^2 = t^2.$$

Mais on a vu que, pour rendre carrés $u^2 + r^2$ et $4u^2 + r^2$, il faudrait rendre carré $m^4 + 14m^2n^2 + n^4$, ce qui est impossible.

Dans le 3[e] cas, il faut poser

$$p = 2r^2, \quad p + q = s^2, \quad p + 2q = 2t^2, \quad p + 3q = u^2,$$

de là

$$q = t^2 - r^2, \quad p + q = t^2 + r^2 = s^2,$$
$$p + 3q = 3t^2 - r^2 = u^2.$$

Or $3t^2 = u^2 + r^2$ est impossible; r et u n'étant pas divisibles par 3, le deuxième membre ne saurait être divisible par 3 comme le premier.

Dans le 4[e] cas, il faut poser

$$p = 6r^2, \quad p + q = s^2, \quad p + 2q = 2t^2, \quad p + 3q = 3u^2;$$

de là

$$q = u^2 - 2r^2, \qquad p + q = u^2 + 4r^2 = s^2,$$
$$p + 2q = 2u^2 + 2r^2 = 2t^2$$

ou

$$u^2 + r^2 = t^2.$$

Or le système

$$u^2 + 4r^2 = s^2, \quad u^2 + r^2 = t^2$$

est impossible.

Dans le 5ᵉ cas, il faut poser

$$p = 3r^2, \quad p + q = s^2, \quad p + 2q = t^2, \quad p + 3q = 3u^2,$$

les nombres r, s, t, u étant impairs.

On a

$$q = u^2 - r^2, \quad p + q = 2r^2 + u^2 = s^2,$$

équation impossible aussi bien que

$$p + 2q = r^2 + 2u^2 = t^2,$$

car il en résulterait un carré de forme $8k + 3$.

Dans le 6ᵉ et dernier cas, chacun des nombres $p + q$, $p + 2q$, $p + 3q$ devra être un carré impair.

Soient x^2, y^2, z^2, t^2 ces carrés, on aura

$$t^2 - z^2 = z^2 - y^2 = y^2 - x^2.$$

Si l'on fait

$$t + z = 2u, \quad t - z = 2v,$$

$$y + x = 2r, \quad y - x = 2s,$$

l'équation

$$t^2 - z^2 = y^2 - x^2$$

deviendra

(1) $$uv = rs;$$

et comme l'on a

$$t = u + v, \quad z = u - v, \qquad y = r + s, \quad x = r - s,$$

l'équation

$$t^2 - z^2 = z^2 - y^2$$

deviendra

$$4uv = (u - v)^2 - (r + s)^2$$

ou

$$(2) \qquad u^2+v^2-r^2-s^2-8uv=0.$$

Des deux nombres u, v, l'un est pair et l'autre impair, il en est de même de r et s; on peut supposer r pair et v impair.

Si l'on pose

$$\frac{u}{r}=\frac{s}{v}=\lambda \quad \text{ou} \quad u=\lambda r, \quad s=\lambda v,$$

l'équation (2) deviendra

$$\lambda^2(r^2-v^2)-8rv\lambda-(r^2-v^2)=0,$$

d'où l'on tire

$$\lambda(r^2-v^2)=4rv\pm\sqrt{r^4+14r^2v^2+v^4}.$$

Pour avoir λ rationnel, il faudrait que

$$r^4+14r^2v^2+v^4$$

fût un carré, ce qui est impossible, puisque r est pair.

N. B. — *Voyez* les *Commentationes Arithmeticæ collectæ,* Auspic. Acad. Petrop. edd. P.-H. Fuss et N. Fuss, 2 vol. Petrop. 1849. Dans le tome II, Mém. 77, Euler s'appuie sur l'impossibilité *reconnue* de trouver quatre carrés *en progression arithmétique;* il n'indique pas l'ouvrage où se trouve la démonstration, qui pourrait fort bien être plus simple que la précédente.

IV.

Théorème. — *L'équation*

$$r^2=m^4+14m^2n^2+n^4$$

est impossible pour m et n impairs (premiers entre eux).

Démonstration. — Le second membre est divisible

par 16, parce que m^2 et n^2 ont la forme $8k+1$; ainsi r est divisible par 4. L'équation mise sous la forme

$$(m^2+7n^2+r)(m^2+7n^2-r^2)=48n^4=3.16p^4q^4,$$

en supposant $n=pq$, p et q premiers entre eux, n'admet que la décomposition

$$m^2+7u^2\pm r=4p^4, \quad m^2+7u^2\mp r=12q^4,$$

d'où, par addition,

$$\begin{aligned} m^2=2p^4-7p^2q^2+6q^4 &= (p^2-2q^2)(2p^2-3q^2) \\ &= (2q^2-p^2)(3q^2-2p^2). \end{aligned}$$

Comme p^2-2q^2, et $2p^2-3q^2$ donnent

$$2(p^2-2q^2)-(2p^2-3q^2)=-q^2,$$

on voit que p^2-2q^2, $2p^2-3q^2$ sont premiers entre eux. D'ailleurs ces nombres de forme $8k-1$ ne sauraient être carrés. Il faut prendre

$$m^2=(2q^2-p^2)(3q^2-2p^2)$$

et supposer $2q^2-p^2$ et $3q^2-2p^2$ carrés, ce qui est impossible, car on en tirerait quatre carrés en progression arithmétique, savoir p^2, q^2, $2q^2-p^2$, $3q^2-2p^2$; la raison est q^2-p^2.

Théorème. — *On ne saurait avoir*

$$r^2=p^4-p^2q^2+q^4.$$

Démonstration. — Si p et q sont impairs en posant

$$p+q=2m, \quad p-q=2n,$$

l'un des nombres m, n serait pair et l'autre impair, et comme on a

$$p=m+n, \quad q=m-n,$$

il en résulterait

$$r^2 = p^4 + q^4 - p^2 q^2$$
$$= 2(m^4 + 6m^2 n^2 + n^4) - (m^4 - 2m^2 n^2 + n^4)$$

ou

$$r^2 = m^4 + 14m^2 n^2 + n^4,$$

ce qui est impossible.

Si des nombres p, q l'un est pair et l'autre impair, on fera

$$p + q = m, \quad p - q = n;$$

m et n seront impairs, on aura

$$2p = m + n, \quad 2q = m - n;$$

par suite

$$16r^2 = (m + n)^4 - (m^2 - n^2)^2 + (m - n)^4$$
$$= m^4 + 14m^2 n^2 + n^4,$$

ce qui est impossible.

Le même mode de démonstration s'étend à beaucoup d'équations biquadratiques de la forme

$$r^2 = x^4 + ax^2 y^2 + by^4.$$

Il en sera question dans une autre Note.

SUR LE NOMBRE DES DIAGONALES D'UN POLYÈDRE (*).

Je désignerai par f le nombre des faces, par s le nombre des sommets et par a le nombre des arêtes du polyèdre. On sait qu'il existe entre ces trois quantités la relation

(1) $$f + s = a + 2$$

découverte par Euler.

(*) Ce problème a été traité par M. Henri Binder dans les *Archives* de Grunert, t. VIII, p. 221.

Soient, en outre, f_3 le nombre des faces triangulaires; f_4 le nombre des faces quadrangulaires, etc., et d le nombre des diagonales.

Le nombre des distances mutuelles des s sommets est $\frac{s(s-1)}{2}$. Pour avoir le nombre des diagonales, il faut retrancher les distances mutuelles des sommets des triangles, $3f_3$; celles des sommets des quadrilatères, $6f_4$, etc , ce qui donne

$$\frac{s(s-1)}{2} - 3f_3 - 6f_4 - 10f_5 - \ldots - \frac{n(n-1)}{2}f_n - \ldots$$

Mais chaque arête appartenant à deux faces a été retranchée deux fois; il faut donc ajouter a, et l'on aura

$$(2)\quad d = \frac{s(s-1)}{2} + a - 3f_3 - 6f_4 - \ldots - \frac{n(n-1)}{2}f_n - \ldots.$$

C'est la formule cherchée.

Exemples.

Tétraèdre :

$$s=4,\quad a=6,\quad f_3=4,\quad d=0.$$

Hexaèdre à faces quadrangulaires :

$$s=8,\quad a=12,\quad f_3=0,\quad f_4=6,\quad f_5=0\ldots,\quad d=4.$$

Dodécaèdre à faces pentagonales :

$$s=20,\ a=30,\ f_3=f_4=f_6=\ldots=0,\ f_5=12,\ d=100.$$

Remarque. — On peut écrire la formule (2) ainsi

$$(3)\quad d = \frac{s(s-3)}{2} + s + a - 3f_3 - 6f_4 - \ldots - \frac{n(n-1)}{2}f_n - \ldots.$$

Mais, d'après la formule d'Euler, on a

$$s + a = 2a + 2 - f.$$

D'ailleurs on a

$$(4) \qquad 2a = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots + nf_n + \ldots,$$

car le dernier membre donne le total des arêtes de toutes les faces, et chaque arête est comptée deux fois. Donc on pourra mettre l'équation (2) sous la forme

$$(5) \quad d = \frac{s(s-3)}{2} + 2 - f - 2f_4 - 5f_5 - 9f_6 - \ldots - \frac{n(n-3)}{2} f_n \ldots.$$

Corollaire I. — Le nombre des diagonales d'un polyèdre est toujours inférieur au nombre des diagonales du polygone qui a le même nombre de sommets, ce qui est d'ailleurs évident.

Corollaire II. — Si le polyèdre n'a que des faces triangulaires, on a

$$(6) \qquad d = \frac{s(s-3)}{2} + 2 - f.$$

D'ailleurs l'équation (4) donne

$$(7) \qquad 2a = 3f.$$

On peut éliminer entre les équations (1), (6) et (7) deux des trois quantités a, s, f, et en faisant le calcul on trouve pour d, l'une des trois formes

$$d = \frac{(s-3)(s-4)}{2} = \frac{(f-2)(f-4)}{8} = \frac{(a-3)(a-6)}{18}.$$

P.

SUR UNE QUESTION DE MAXIMUM;

PAR M. PAUL SERRET.

---

1. Soient ABCD un tétraèdre quelconque; A′B′C′D′ un quadrilatère gauche *fermé* dont les arêtes successives

soient perpendiculaires, respectivement, aux plans des faces du premier tétraèdre, et proportionnelles aux aires de ces faces; et A'B'C'D' le tétraèdre de même nom et des mêmes sommets :

1° « Les volumes V, V' des deux tétraèdres *orthogonaux* ABCD, A'B'C'D' sont liés par la relation

$$V' = \frac{3}{4} V^2. »$$

2° « Les trois angles formés par les arêtes opposées du tétraèdre primitif ABCD servent de mesure aux trois *dièdres diagonaux* du quadrilatère orthogonal A'B'C'D'. » Le troisième de ces dièdres, qui a seul besoin d'une définition, ayant chacune de ses faces parallèle à deux arêtes opposées du quadrilatère A'B'C'D', et son arête parallèle à la droite des milieux des diagonales.

Corollaire. — « Si *deux* des dièdres diagonaux du quadrilatère orthogonal sont *droits*, quatre arêtes, opposées deux à deux, du tétraèdre primitif, sont perpendiculaires entre elles. Et il en est de même des deux dernières arêtes. » Cette dernière conclusion résultant soit, au point de vue géométrique, de la collinéation des trois hauteurs dans un triangle sphérique; soit, au point de vue analytique, de cette formule

$$a.a'.\cos(a, a') + b.b'.\cos(b, b') + c.c'.\cos(c, c') = 0,$$

où a et a', b et b', c et c' désignent les arêtes opposées du tétraèdre.

Remarque. — La relation

$$V' = \frac{3}{4} V^2,$$

que M. Painvin trouve à l'aide des déterminants (*Nouvelles Annales*, 1862), s'obtient, bien entendu, et de

la manière la plus rapide, par de simples considérations de géométrie. Je l'avais rencontrée moi-même depuis longtemps, et l'avais appliquée au problème de Lagrange.

La solution suivante est extraite d'un Mémoire que j'ai eu l'honneur de soumettre à M. Liouville vers la fin d'octobre 1862, et qui a été inséré dans le numéro de novembre du *Journal de Mathématiques*.

2. Problème. — *Les aires des quatre faces étant données, définir le tétraèdre maximum.* (Lagrange, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773, p. 160.)

Solution. — Soient ABCD le tétraèdre cherché, et A'B'C'D' son tétraèdre orthogonal. Les aires des faces du premier tétraèdre étant données, et son volume étant maximum : les quatre arêtes consécutives A'B', B'C', C'D', D'A' du second tétraèdre sont données de longueur, et son volume doit être maximum. Or cette condition exige que les dièdres diagonaux du quadrilatère orthogonal A'B'C'D' soient droits. En effet, si le dièdre A'C', par exemple, n'était droit, on pourrait, en laissant immobile la face A'B'C' dans son plan, amener le plan de la face A'D'C' à être perpendiculaire au plan de la première par une rotation effectuée autour de la diagonale A'C'. Par là, la base A'B'C' du tétraèdre orthogonal ne changerait point, mais sa hauteur et, dès lors, son volume augmenteraient. Donc les dièdres diagonaux du quadrilatère orthogonal sont droits, et les arêtes opposées du tétraèdre primitif sont perpendiculaires entre elles : conclusion comprise dans les équations obtenues par Lagrange,

$$a^2 - b'^2 - c'^2 = b^2 - c'^2 - a'^2 = c^2 - a'^2 - b'^2,$$

et énoncée déjà, avec toutes ses conséquences, par M. Painvin.

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION TRANSCENDANTE;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Étant données la corde $2a$ et la surface S d'un segment circulaire plus petit que la moitié du cercle, trouver l'arc $2y$.

En appelant r le rayon, on trouve successivement et sans difficulté

$$a = r \sin y,$$

$$S = \frac{1}{2} r^2 (2y - \sin 2y),$$

$$(1) \qquad 2.S.\sin^2 y + a^2 \sin 2y - 2a^2 y = 0.$$

Je représente par $F(y)$ le premier membre de l'équation (1), et j'obtiens les deux dérivées

$$F'(y) = 2.S.\sin 2y + 2a^2 \cos 2y - 2a^2,$$
$$F''(y) = 4.S.\cos 2y - 4a^2 \sin 2y.$$

Zéro est une racine de l'équation (1), et cette racine peut s'appeler double, parce qu'elle vérifie l'équation

$$F'(y) = 0.$$

L'équation (1) n'a pas de racine négative; en effet, $F(-y)$ peut s'écrire

$$2.S.\sin^2 y + a^2(2y - \sin 2y),$$

et reste positif pour toute valeur positive de y.

Si nous désignons par u le plus petit arc positif ayant pour tangente $\frac{S}{a^2}$, la dérivée $F'(y)$ devient

$$2a^2 \sin 2y (\tan u - \tan y);$$

elle est positive quand y varie de o à u, et négative quand y varie de u à π.

La fonction $F(y)$ est nulle pour $y = 0$; elle est croissante, et par conséquent positive, quand y varie de o à u, et elle décroît ensuite; lorsque y atteint la valeur $\frac{\pi}{2}$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2S - \pi a^2,$$

et comme le segment est plus petit qu'un demi-cercle, on a

$$S < \pi \frac{a^2}{2}, \quad \text{et} \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

L'équation (1) a donc une racine comprise entre u et $\frac{\pi}{2}$.

La fonction $F(y)$ reste négative quand y varie de $\frac{\pi}{2}$ à π et il est inutile d'aller plus loin, car

$$F(y) < 2S + a^2 - 2a^2 y < \pi a^2 + a^2 - 2a^2 y,$$

et ce dernier polynôme est constamment négatif pour des valeurs de y supérieures à $\frac{1+\pi}{2}$; il en est de même à fortiori de $F(y)$.

Afin d'arriver à une détermination numérique, je fais une hypothèse particulière, par exemple, $S = a^2$; l'équation (1) devient alors

$$(2) \qquad y = \sin^2 y + \frac{\sin 2y}{2},$$

ou bien

$$(3) \qquad F(y) = \sin^2 y + \frac{\sin 2y}{2} - y,$$

et alors

$$F'(y) = \sin 2y + \cos 2y - 1,$$
$$F''(y) = 2\cos 2y - 2\sin 2y.$$

J'applique la méthode de Newton rectifiée par Fourier, et j'obtiens deux limites plus resserrées

$$\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{F\left(\frac{\pi}{4}\right)}{F'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0,89270,$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1,28540,$$

que je pourrais resserrer encore davantage.

On pourrait aussi dans l'équation (2) substituer $\frac{\pi}{4} + z$ à y, ce qui donne en développant par la formule de Taylor et en faisant quelques réductions

$$\frac{\pi}{4} + z = 1 + z - z^2 - \frac{z^3}{3}\left(2 - z - \frac{2}{5}z^2\right) - \frac{2}{45}z^6 \ldots,$$

or $z < \frac{\pi}{4}$, on peut donc en négligeant z^7 écrire que $z^2 < 1 - \frac{\pi}{4}$, $z < 0{,}46$, $y < 1,24$; en prenant pour y la valeur 1,24 et en la transformant en degrés, on trouve environ 71°, mais comme $y < 1,24$, il est prudent de n'essayer que 70°. Si j'adopte cette valeur, les deux membres de l'équation (2) deviennent

1,2217, 1,2044;

j'essaye alors 69°, et les deux membres de l'équation (2) deviennent

1,2043, 1,2061.

La véritable valeur est donc comprise entre 69° et 70°;

après quelques fausses positions on trouve

pour 69°5′56″..... 1,206003 et 1,206006,
pour 69°5′57″..... 1,206008 et 1,206005.

Le résultat est donc à une demi-seconde près 69° 5′ 56″ $\frac{1}{2}$.

Il est commode d'employer dans ces calculs, outre les logarithmes ordinaires, des tables de lignes trigonométriques naturelles, de carrés, de degrés exprimés en parties du rayon. Ces divers éléments se trouvent réunis à beaucoup d'autres dans un petit volume intitulé : *Collectio tabularum ad calculos breviter subducendos, auctore* J. Dupuis, c'est-à-dire : *Recueil de tables propres à abréger les calculs.*

MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE POUR TROUVER L'ÉQUATION DE LA DÉVELOPPÉE DE L'ELLIPSE;

Par MM. LIGNIÈRES et Charles DE TRENQUELLÉON.

Lieu des points d'où l'on ne peut mener que trois normales à l'ellipse.

Ire Méthode. — Les pieds des normales menées par le point (α, 6) sont donnés par l'intersection de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \tag{1}$$

et de l'hyperbole

$$6 - y = \frac{a^2y}{b^2x}(\alpha - x). \tag{2}$$

Les lignes du second degré passant par les points d'intersection des courbes (1) et (2) ont pour équation gé-

nérale

$$a^2y^2 + \lambda c^2xy + b^2x^2 - \lambda a^2\alpha y + \lambda b^2\beta x - a^2b^2 = 0;$$

cette équation représentera deux droites, si l'on a

$$c^2\alpha\beta\lambda^3 + (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)\lambda^2 + 4a^2b^2 = 0,$$

ou

$$4a^2b^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)\left(\frac{1}{\lambda}\right) + c^2\alpha\beta = 0,$$

et à chaque système de deux droites correspond une valeur réelle de λ.

S'il n'y a que trois normales, les courbes (1) et (2) n'ont que trois points communs, et il n'y a que deux systèmes de droites; et, par suite, l'équation en λ, ainsi que l'équation en $\frac{1}{\lambda}$, ont deux racines égales ; on a donc

$$(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)^3 + 27.a^2b^2c^4\alpha^2\beta^2 = 0,$$

d'où

(3) $$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + 3(a^2b^2\alpha^2\beta^2)^{\frac{1}{3}}(c^4)^{\frac{1}{3}} = c^4;$$

et par suite

(4) $$(a^2\alpha^2)^{\frac{1}{3}} + (b^2\beta^2)^{\frac{1}{3}} = (c^4)^{\frac{1}{3}} \text{ (*)},$$

équation qu'on peut écrire ainsi

$$\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

ce qui est l'équation connue de la développée de l'ellipse.

IIe Méthode. — Je prends l'équation de la normale à l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, en fonction du coeffi-

---

(*) En valeurs réelles de α et β les équations (3) et (4) admettent les mêmes solutions. G.

cient angulaire

$$y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(1) \qquad (y - mx)^2 (a^2 + b^2 m^2) - c^4 m^2 = 0.$$

En général, l'équation (1) donne pour m quatre valeurs : elle n'aura que trois racines distinctes, lorsqu'elle aura une racine commune avec l'équation formée en égalant à 0 la dérivée de son premier membre par rapport à m ; cette équation dérivée est

$$(2) \qquad -x(y - mx)(a^2 + b^2 m^2) + (y - mx)^2 b^2 m - c^4 m = 0.$$

Les équations (1) et (2) doivent avoir une racine commune. Multiplions l'équation (1) par x et l'équation (2) par $(y - mx)$ et ajoutons, il vient

$$(y - mx)^3 = \frac{c^4 y}{b^2};$$

d'où l'on tire

$$m = \frac{y - \sqrt[3]{\frac{c^4 y}{b^2}}}{x}.$$

Si je change, dans cette valeur de m, x en y, y en x, a en b et b en a, j'aurai la valeur de $\frac{1}{m}$ (*); donc

$$\frac{1}{m} = \frac{x - \sqrt[3]{\frac{c^4 x}{a^2}}}{y}.$$

Multipliant ces deux dernières équations membre à

(*) Parce que l'équation (1) conserve les mêmes solutions lorsqu'on y change x en y, y en x, a en b, b en a, et m en $\frac{1}{m}$. G.

membre, il vient

$$y\sqrt[3]{\frac{c^4 x}{a^2}} + x\sqrt[3]{\frac{c^4 y}{b^2}} = \sqrt[3]{\frac{c^8 xy}{a^2 b^2}},$$

ou bien, en divisant les deux membres par $\sqrt[3]{\frac{c^8 xy}{a^2 b^2}}$:

$$\left(\frac{x}{\frac{c^2}{a}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\frac{c^2}{b}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

C'est l'équation connue de la développée de l'ellipse.

PROPRIÉTÉS RELATIVES A LA SOMME ET A LA DIFFÉRENCE DE DEUX CARRÉS;

PAR LE R. P. L. CLAUDE,
De la Compagnie de Jésus (*).

1. *Si un nombre entier n est la somme de deux carrés différents, le nombre $2^m.n$ le sera pareillement.*

Soit $n = a^2 + b^2$; nous aurons

$$2^m.n = 2^m a^2 + 2^m b^2.$$

Si m est pair, chacun des termes du second membre est un carré; si m est impair et égal à $2k+1$, nous aurons

$$2^{2k+1}(a^2+b^2) = 2^{2k}.2(a^2+b^2) = 2^{2k}(a+b)^2 + 2^{2k}(a-b)^2.$$

Donc....

2. Réciproquement, *si un nombre $2^m.n$ est la somme*

(*) Plusieurs des propriétés dont il s'agit dans l'article que le R. P. L. Claude nous a adressé ayant déjà été démontrées dans les *Nouvelles Annales*, nous ne publions qu'un extrait de cet article.

de deux carrés différents, le nombre n le sera pareillement.

Soit $2^m . n = a^2 + b^2$; nous aurons

$$2^{m-1} . n = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Or, $a^2 + b^2$ étant un nombre pair, a et b ont un même ordre de parité, c'est-à-dire sont tous deux pairs ou tous deux impairs, donc $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$ sont des nombres entiers. Donc....

3. *Tout nombre impair, à l'exception de l'unité, est la différence de deux carrés,*

Nous avons identiquement

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

et ab peut représenter un nombre impair quelconque, puisque dans le cas où le nombre proposé serait premier, ou le carré d'un nombre premier, nous n'avons qu'à faire $b = 1$. Les nombres a et b étant impairs, $a + b$ et $a - b$ seront des nombres pairs, et par suite $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$ sont des nombres entiers. Donc....

4. *Tout multiple de 4, à l'exception de 4 lui-même est la différence de deux carrés.*

Soit $4ab$ le nombre proposé; nous aurons identiquement

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2.$$

Donc....

5. *Tout carré, à l'exception de 1 et de 4, est la différence de deux carrés.*

En effet, un carré quelconque est un nombre impair, ou un multiple de *quatre*.

6. *Aucun nombre simplement pair ne peut être la différence de deux carrés.*

Soit, en effet,

$$2ab = (x^2 - y^2) = (x + y)(x - y),$$

le produit de ces deux facteurs étant simplement pair, l'un des deux facteurs devra être pair et l'autre impair, ce qui est impossible, car la première propriété ne peut avoir lieu sans que x et y aient un même ordre de parité, tandis que la seconde exige que x et y aient un ordre de parité différent. Donc x et y ne sauraient être des nombres entiers. Donc....

7. *Tout nombre qui est la différence de deux carrés jouit de cette propriété autant de fois que l'on peut former de combinaisons différentes avec le nombre des facteurs premiers qu'il renferme*, 2 *à* 2, 3 *à* 3, ... *n à n*.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les facteurs premiers du nombre N, de manière que nous ayons

$$N = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \ldots . p_n^{\alpha_n},$$

nous pourrons représenter par a l'une quelconque des combinaisons ci-dessus désignées; a aura pour chacune d'elles une valeur différente. Mais, à une valeur différente de a correspond une valeur différente de b, et par suite des valeurs différentes de $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$; donc....

Note du Rédacteur. — Lorsque N est un nombre impair, l'équation

$$(x + y)(x - y) = N$$

admet autant de solutions entières et positives que N a

de diviseurs moindres que sa racine carrée, en comprenant l'unité parmi ces diviseurs. Car, à chaque solution entière et positive de l'équation

$$(x+y)(x-y)=\mathrm{N},$$

correspond un diviseur $x-y$ de N, et moindre que $\sqrt{\mathrm{N}}$, puisque $x-y<x+y$. Et, inversement à chaque diviseur $x-y$ de N moindre que $\sqrt{\mathrm{N}}$, correspond une solution entière et positive de l'équation considérée.

Il en résulte que si la décomposition du nombre N en ses facteurs premiers donne

$$\mathrm{N}=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n},$$

et qu'en outre N ne soit pas un carré, le nombre des solutions dont il s'agit est

$$\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)}{2}.$$

Si le nombre impair N était un carré, le nombre des solutions serait

$$\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)-1}{2}.$$

Quand N est pair, la décomposition de N en facteurs premiers donne

$$\mathrm{N}=2^6.p_1^{\alpha_1}\,p_2^{\alpha_2}\ldots\,p_n^{\alpha_n}.$$

L'un des deux facteurs $x+y$, $x-y$ étant nécessairement un nombre pair, il faudra, pour que x et y soient entiers, que l'autre facteur soit aussi un nombre pair. Cette condition est d'ailleurs suffisante pour que x et y soient entiers. Ainsi, le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$(x+y)(x-y)=\mathrm{N}=2^6.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n},$$

sera égal au nombre des décompositions de N en deux facteurs entiers $(x+y)$, $(x-y)$, inégaux et divisibles, chacun, par *deux*.

Le nombre total des diviseurs de N, en y comprenant N et 1, est

$$(\beta+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1).$$

Il s'ensuit que, si N n'est pas un carré, le nombre des décompositions de N en deux facteurs entiers est

$$\frac{(\beta+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)}{2}.$$

Mais, pour obtenir les solutions cherchées, il faut écarter toutes les décompositions dans lesquelles l'un des deux facteurs entiers est impair. Et il est clair que le nombre de ces dernières décompositions est précisément égal au nombre des diviseurs impairs de N, c'est-à-dire égal à

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1).$$

D'où nous concluons que le nombre des solutions cherchées est

$$\frac{(\beta+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)}{2}-(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1),$$

ou

$$\frac{(\beta-1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)}{2}.$$

Lorsque $2^\beta p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$ est un carré, le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$(x+y)(x-y)=2^\beta p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n},$$

est

$$\frac{(\beta-1)(\alpha_1+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_n+1)-1}{2},$$

comme il est facile de s'en assurer par ce qui précède.

G.

QUESTIONS.

640. On prend les médianes d'un triangle quelconque pour côtés d'un second triangle, puis les médianes de ce dernier pour côtés d'un troisième triangle, et ainsi de suite ; on a de cette manière deux séries de triangles : les triangles dont les rangs sont impairs et ceux dont les rangs sont pairs ; dans chaque série les triangles sont toujours semblables. (Ad. G.)

641. Démontrer la relation

$$\begin{aligned}\cos(a+b+c)\cos(a+b-c)\cos(a+c-b)\cos(b+c-a)\\ -4\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c\\ =-(\cos a+\cos b+\cos c)(\cos a+\cos b-\cos c)\\ \times(\cos a+\cos c-\cos b)(\cos b+\cos c-\cos a).\end{aligned}$$

(Catalan.)

642. Discuter la fonction

$$y=\frac{(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2}{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}}.$$

En égalant à zéro la dérivée de y, on trouve l'équation

$$1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}-(n+1)x^n=0;$$

trouver les racines réelles de cette équation.

x étant supposé compris entre $+1$ et -1, développer y en série ordonnée suivant les puissances de x.

(Catalan.)

643. Théorème concernant les surfaces d'un ordre quelconque (à démontrer par des considérations de pure géométrie).

Parmi les surfaces de degré n qui forment un faisceau donné, il y en a, en général (*),

$$m[(m+2n-3)^2-(n-1)(n+2m-3)]$$

qui touchent une surface donnée du degré m.

Par exemple, dans un faisceau de surfaces du degré n, il y en a $3(n-1)^2$ qui touchent un plan donné.

(E. DE JONQUIÈRES.)

644. On sait que le cercle osculateur en un point quelconque A d'une parabole coupe cette courbe en un second point B; démontrer : 1° que la droite AB et toutes les droites analogues sont tangentes à une même parabole; 2° que le lieu géométrique des milieux des cordes telles que AB est une parabole.

645. Soient δ, δ', δ'' les distances du centre d'une conique à trois tangentes, et ρ, ρ', ρ'' les distances de ce centre aux points de contact; on a

$$\delta^2\rho^2(\delta''^2-\delta'^2)+\delta'^2\rho'^2(\delta^2-\delta''^2)+\delta''^2\rho''^2(\delta'^2-\delta^2)=0.$$

(HOUSEL.)

646. Par un point (α, β) du plan d'une ellipse

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0,$$

on peut, en général, mener quatre droites qui coupent cette courbe sous un angle donné, δ, différent de zéro; trouver l'équation du système de ces quatre droites.

(*) *En général*, c'est-à-dire si la surface S^m n'a ni ligne nodale, ni ligne de rebroussement, etc.

NOTE SUR LE CERCLE TANGENT A TROIS CERCLES DONNÉS;

PAR M. PAUL SERRET.

1. THÉORÈME. — *Les cercles, en nombre infini, isogonaux à trois cercles donnés, forment quatre séries distinctes; et les cercles de chaque série ont, pour axe radical commun, l'un des quatre axes de similitude des trois cercles donnés.*

Considérons, en effet, deux cercles déterminés, isogonaux aux trois cercles donnés, et se coupant dans les deux points o et ω. Si l'on construit la figure réciproque de la proposée, par rapport à l'origine o, les deux cercles se transforment en deux droites concourantes; chacune de ces droites coupe sous un même angle les transformés des trois cercles donnés; et le point de concours ω' de ces droites est un centre de similitude commun aux trois cercles transformés. Dès lors, chacune des droites, en nombre infini, que l'on peut mener par le point de concours ω' des deux premières, coupe sous un même angle les trois cercles transformés; et chacun des trois cercles, passant par les points o et ω de la figure primitive, coupe, sous un même angle, les trois cercles primitifs.

D'ailleurs, les trois cercles transformés ayant un centre commun de similitude ω', si le point o est tel, que la droite $\omega' o$ rencontre les trois cercles, les *réciproques* de ceux-ci, par rapport à l'origine o, ou les trois cercles primitifs, seront coupés sous un même angle par la droite $o\omega'$ qui sera, dès lors, un axe de similitude de ces cercles. Cette propriété subsistera donc toujours, que la droite $o\omega'$ rencontre ou non les cercles transformés; et la droite $o\omega'$,

ou $o\omega$, est un axe de similitude des trois cercles primitifs.

2. Si, parmi les cercles isogonaux aux trois cercles donnés, l'on considère en particulier le cercle orthogonal et le cercle tangent, on verra que « l'un quelconque des cercles tangents et le cercle orthogonal ont pour axe radical l'un des quatre axes de similitude des cercles proposés. » (Poncelet.) La construction du cercle tangent se réduisant dès lors à la détermination d'un cercle tangent à l'un quelconque des trois proposés, et ayant pour axe radical, par rapport au cercle orthogonal, l'un des quatre axes de similitude des cercles donnés. Chacun de ces axes donne naissance à deux cercles tangents, et le nombre des solutions est *huit*.

3. Si l'on voulait de même construire un cercle coupant, sous un même angle donné i, les trois cercles proposés, il suffirait encore de mener un cercle coupant, sous l'angle i, l'un quelconque des trois cercles proposés, et ayant pour radical commun, avec le cercle orthogonal, l'un des quatre axes de similitude. Comme celui du cercle tangent, le nouveau problème admet huit solutions; et tous les cercles isogonaux que l'on obtient en faisant varier l'angle i de o à $\frac{\pi}{2}$ ont, pour axe radical commun avec deux des huit cercles tangents, l'un des axes de similitude des trois cercles proposés.

QUESTION 636;

SOLUTION DE MM. NOBLOT ET QUANTIN,
Élèves du lycée impérial de Lyon.

ÉNONCÉ. — *On suppose que des rayons lumineux perpendiculaires à l'axe d'une parabole soient, à leur rencontre avec cette courbe, réfléchis en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence : trouver l'enveloppe des rayons réfléchis, et déterminer géométriquement le point de contact d'un rayon réfléchi et de l'enveloppe.*

Il est à remarquer que la direction du rayon réfléchi est perpendiculaire à la droite qui joint le foyer F de la parabole au point où le rayon lumineux rencontre cette courbe.

Prenons l'équation de la parabole en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\omega}.$$

Soient ρ_1, ω_1 les coordonnées du point où le rayon incident rencontre la parabole, l'équation du rayon réfléchi est

$$\rho = \frac{\rho_1}{\cos(\omega_1 - \omega)}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{p}{(1 - \cos\omega_1)\cos(\omega_1 - \omega)}.$$

Éliminons ω_1 entre cette dernière équation et sa dérivée par rapport à ω_1. On a :

$$(1) \qquad \rho\,(1 - \cos\omega_1)\cos(\omega_1 - \omega) = p,$$

$$(2) \qquad \cos(\omega_1 - \omega)\sin\omega_1 - (1 - \cos\omega_1)\sin(\omega_1 - \omega) = 0.$$

De l'équation (2) on tire

$$(3) \qquad \tang(\omega_1 - \omega) = \frac{\sin\omega_1}{1 - \cos\omega_1} = \cot\frac{\omega_1}{2}.$$

En éliminant cos $(\omega_1 - \omega)$ entre (1) et (3) on trouve

$$\sin\frac{\omega_1}{2} = \sqrt[3]{\frac{p}{2 \cdot \rho}} = \alpha.$$

Il en résulte

$$\text{tang}\,\omega_1 = \frac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{1-2\alpha^2}.$$

De l'équation (3) tirons tang ω_1, et égalons les deux valeurs de tang ω_1 :

$$\text{tang}\,\omega_1 - \text{tang}\,\omega = (1 + \text{tang}\,\omega . \text{tang}\,\omega_1)\cot\frac{\omega_1}{2}$$
$$= (1 + \text{tang}\,\omega . \text{tang}\,\omega_1)\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{\alpha}};$$

d'où

$$\text{tang}\,\omega_1 = \frac{\alpha\,\text{tang}\,\omega + \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha - \text{tang}\,\omega . \sqrt{1-\alpha^2}}.$$

En égalant, il vient :

$$\alpha(3-4\alpha^2)\,\text{tang}\,\omega = (4\alpha^2 - 1)\sqrt{1-\alpha^2};$$
$$\alpha^2(3-4\alpha^2)^2(1+\text{tang}^2\,\omega) = 1;$$

et finalement :

$$\cos\omega = \alpha(3-4\alpha^2).$$

Remplaçons α par sa valeur, et nous aurons, pour l'équation demandée, en coordonnées polaires :

$$\cos\omega = 3\sqrt[3]{\frac{p}{2 \cdot \rho}} - 2 . \frac{p}{\rho}.$$

Nous pouvons transformer en coordonnées rectilignes, mais remarquons d'abord que si l'on veut discuter l'équation obtenue en coordonnées polaires, on fera bien de la

mettre sous la forme

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\omega}{3}\right)=\sqrt[3]{\frac{p}{2.\rho}},$$

ou

$$\rho=\frac{p}{2.\sin^3\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\omega}{3}\right)},$$

qu'on déduit de la précédente en remarquant que

$$\cos\omega=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\omega}{3}\right)-4\sin^3\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\omega}{3}\right).$$

En posant

$$\cos\omega=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

on a

$$2(x+2p)^3=27.p(x^2+y^2).$$

Détermination directe du point de contact du rayon réfléchi et de son enveloppe.

Quand des rayons lumineux émanent d'un point A, le point de contact X du rayon réfléchi MX, avec la *caustique*, son enveloppe, est à une distance de M donnée par la formule

$$\lim \text{MX}=\frac{\text{AM}.\text{R}.\cos\alpha}{2\text{AM}-\text{R}\cos\alpha}\ (^*),$$

R étant le rayon de courbure en M.

Dans le cas qui nous occupe, AM est *infini*, et la for-

(*) Cette formule est démontrée dans les *Éléments de Calcul infinitésimal* de M. Duhamel (t. Ier, p. 205, édition de 1856); α est l'angle que le rayon incident forme avec la normale à la courbe au point M où ce rayon rencontre la courbe. G.

mule devient

$$\lim MX = \frac{R \cos \alpha}{2}.$$

La courbe étant une parabole

$$R = \frac{(p+2x)}{p}\sqrt{p^2+y^2},$$

en prenant pour origine le sommet de la courbe.

La sous-normale est constante et égale à p; on a donc

$$\cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{p^2+y^2}}.$$

Par suite,

$$\lim MX = \frac{y(p+2x)}{2p} \ (^*).$$

QUESTION 636

(voir p. 97);

SOLUTION DE MM. A. TRACE ET E. PITET,
Élèves en mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.

Le rayon réfléchi MP, faisant avec la normale MN un angle NMP égal à l'angle NMQ que le rayon incident QM forme avec la normale, et la normale divisant en deux parties égales l'angle du rayon vecteur FM avec une parallèle à l'axe menée par le point M, l'angle FMP est droit.

(*) En désignant par x l'abscisse du point M de la parabole rapportée à son sommet, et par x' l'abscisse du point X où le rayon réfléchi MX touche son enveloppe, on a $x' = 3x$, ce qui donne un moyen bien simple de déterminer le point X, lorsqu'on sait déjà que la droite MX est perpendiculaire à FM. G.

Le problème proposé revient donc à celui-ci :

Trouver l'enveloppe de la droite MP, perpendiculaire au rayon vecteur FM, mené du foyer à un point de la parabole.

Appelons α l'angle MFX (*), ρ_1 le rayon vecteur FM, $2p$ le paramètre de la parabole ; nous aurons

$$\rho_1 = \frac{p}{1+\cos\alpha} = \frac{p}{2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Si ω et ρ sont les coordonnées polaires d'un point quelconque P du rayon réfléchi MP, le triangle rectangle FMP donnera

$$\rho_1 = \rho \cdot \cos(\omega - \alpha),$$

et, en remplaçant ρ_1 par sa valeur $\frac{p}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, il viendra, pour l'équation de MP :

$$\rho \cdot \cos(\omega - \alpha)\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{2}.$$

Cherchons l'enveloppe de cette droite quand α varie. Pour cela, prenons la dérivée par rapport à α ; nous aurons

$$\rho\left[\sin(\omega - \alpha)\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos(\omega - \alpha)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right] = 0.$$

Supprimons le facteur $\rho\cos\frac{\alpha}{2}$ qui ne donne pas de solution ; nous aurons alors :

$$\sin(\omega - \alpha)\cos\frac{\alpha}{2} - \cos(\omega - \alpha)\sin\frac{\alpha}{2} = 0,$$

(*) La droite FX est dirigée en sens contraire de l'axe de la parabole. — On est prié de faire la figure.

ou

$$\sin\left(\omega - \frac{3\alpha}{2}\right) = 0,$$

ce qui donne

(1) $$\omega - \frac{3\alpha}{2} = 0.$$

Nous ne poserons pas $\omega - \frac{3\alpha}{2} = k\pi$, car si, laissant α fixe, on donne à ω des valeurs différant d'un multiple de π, on obtiendra la même position du point P.

De l'équation (1) on tire

$$\frac{2\omega}{3} = \alpha, \quad \text{et} \quad \omega - \alpha = \frac{\omega}{3};$$

de sorte que l'enveloppe cherchée a pour équation :

$$\rho \cos^3 . \frac{\omega}{3} = \frac{p}{2}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{p}{2 . \cos^3 \frac{\omega}{3}} \text{ (*)}.$$

Cette équation représente une courbe symétrique par rapport à l'axe polaire, et qui rencontre cet axe en des points A, B, tels que

$$\text{FA} = \frac{p}{2}, \quad \text{et} \quad \text{FB} = 4p.$$

On peut construire géométriquement le point de contact P du rayon réfléchi MPH, et de l'enveloppe.

Prenons sur la parabole un point M', infiniment rapproché de M. Soit M'H' le rayon réfléchi en M', et qui est perpendiculaire sur FM'. Les droites MH, M'H' se couperont en un point P'; le point cherché P est la limite des positions que prend P' sur MH, quand M' converge vers M. Pour déterminer ce point limite, cherchons le point au-

(*) *Manuel des Candidats à l'École Polytechnique*, t. Ier, p. 459.

tour duquel il faut faire tourner le système FM'H', infiniment voisin de FMH, pour l'amener à coïncider avec FMP. Ce point, devant être à la même distance de M et de M', appartient à la perpendiculaire KN' élevée au milieu K de MM'. Il est d'ailleurs à égale distance des droites FM, FM', il doit donc se trouver sur la bissectrice de l'angle formé par ces deux droites au point F. Étant, de même, également distant des droites MP'H, M'P'H', il doit appartenir à la bissectrice de l'angle que ces droites forment en P'. Si l'on fait maintenant coïncider M' avec M, à cette limite la perpendiculaire KN' deviendra la normale MN menée à la parabole au point M. Les deux bissectrices deviennent des perpendiculaires aux droites MF, MH, aux points F et P. Donc, pour déterminer le point de contact P du rayon réfléchi MH et de son enveloppe, on mènera à FM, au point F, une perpendiculaire qui coupera la normale MN en un point O, et de ce dernier point on abaissera une perpendiculaire OP sur MH (*).

Cette propriété permet de trouver l'équation de l'enveloppe d'une autre manière.

En effet, au lieu de chercher l'enveloppe, cherchons le lieu du point P, défini par la propriété géométrique que nous venons de démontrer.

En désignant toujours par ρ_1 et α les coordonnées po-

(*) Cette construction géométrique du point de contact P du rayon réfléchi et de la *caustique* a été donnée par de Lhospital dans son *Analyse des infiniment petits*. La démonstration de MM. Trace et Pitet se fonde sur la théorie des *centres instantanés* de rotation, dont les premiers principes sont exposés avec autant de clarté que de précision dans les *Éléments de Calcul infinitésimal* de M. Duhamel (t. I, p. 190 et suiv.). La détermination du point de contact, l'équation de la caustique, l'expression de son rayon de courbure, se déduisent très-simplement de formules générales démontrées dans un excellent ouvrage ayant pour titre : *Sulla geometria analitica delle linee piane, opuscolo di Giuseppe Sacchi, dottore in matematica* (Pavia, 1854). G.

laires FM, MFX de M; et par ρ et ω celles du point P, on aura d'abord

$$\rho_1 = \frac{p}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \rho_1 = \rho\cos(\omega - \alpha);$$

d'où

$$\rho\cos(\omega - \alpha).\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{2}.$$

Menons MC parallèle à l'axe de la parabole, et FD parallèle à la normale OM. Nous aurons

$$\text{CMO} = \text{DFX}, \quad \text{OMF} = \text{MFD}.$$

Mais

$$\text{CMO} = \text{OMF};$$

puisque MO est normale au point M. Donc

$$\text{DFX} = \text{MFD} = \text{MFP}.$$

Il en résulte

$$\text{MFX} = \frac{2}{3}.\text{PFX}, \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{2}{3}\omega.$$

Par suite, l'équation

$$\rho.\cos(\omega - \alpha)\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{2}$$

donne

$$\rho = \frac{p}{2.\cos^3\frac{\omega}{3}},$$

ce qui est l'équation déjà obtenue.

Note du Rédacteur. — M. Hermile de la Phidelne, élève du lycée Charlemagne, nous a adressé une solution à peu près semblable à celle de MM. Trace et Pitet, élèves du même lycée.

La même question a été résolue par MM. Albin Laval, élève du lycée de Lyon; Geoffroy, élève du lycée de Nancy; Abraham Schnée, élève du lycée Charlemagne; Rouquet et Pelletreau.

QUESTION 634

SOLUTION DE M. F. YLLIAC.

Si l'on appelle E, F, *les axes d'une ellipse; e, f; e', f'; e'', f'' les axes de ses projections sur trois plans rectangulaires, on a*

$$2E^2 + 2F^2 = e^2 + f^2 + e'^2 + f'^2 + e''^2 + f''^2,$$
$$E^2F^2 = e^2f^2 + e'^2f'^2 + e''^2f''^2.$$

(P.)

Soient e_1, f_1; e'_1, f'_1; e''_1, f''_1, les projections des axes E, F sur trois plans rectangulaires; on a, d'après un théorème connu

$$2E^2 = e_1^2 + e'^2_1 + e''^2_1,$$
$$2F^2 = f_1^2 + f'^2_1 + f''^2_1 \quad (*),$$

et, en ajoutant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$2E^2 + 2F^2 = (e_1^2 + f_1^2) + (e'^2_1 + f'^2_1) + (e''^2_1 + f''^2_1).$$

Mais on sait que les projections des axes d'une ellipse sur un plan sont des diamètres conjugués de la projection de l'ellipse; donc, en vertu de l'égalité de la somme des carrés des axes et de la somme des carrés de deux

(*) Nous avons rétabli, dans les premiers membres de ces deux égalités, le facteur 2 qui ne se trouve pas dans la rédaction de M. Ylliac. C'est cette omission qui a fait supposer à M. Ylliac qu'il y avait une erreur dans l'énoncé de la question proposée. Le théorème *connu* sur lequel se fondent les deux égalités dont il s'agit consiste en ce que la somme des carrés des projections d'une droite sur trois plans rectangulaires est le double du carré de la droite projetée. G.

diamètres conjugués d'une même ellipse, on a

$$e^2+f^2=e_1^2+f_1^2,\quad e'^2+f'^2=e_1'^2+f_1'^2,\quad e''^2+f''^2=e_1''^2+f_1''^2;$$

et, par suite,

$$2E^2+2F^2=e^2+f^2+e'^2+f'^2+e''^2+f''^2.$$

Pour démontrer la seconde partie de la proposition, je désigne par S l'aire du rectangle des axes de l'ellipse donnée, et par s, s', s'' les aires des projections de ce rectangle. Alors on a, comme l'on sait :

$$(1)\qquad S^2=s^2+s'^2+s''^2.$$

Mais s, s', s'' sont les aires des parallélogrammes construits sur les projections des axes sur les trois plans, et, par suite, les aires des parallélogrammes construits sur des diamètres conjugués des ellipses projections de l'ellipse donnée. Or, ces aires sont égales, dans chaque ellipse, au rectangle des axes; on a donc

$$s=ef,\quad s'=e'f',\quad s''=e''f'';$$

d'ailleurs

$$S=EF.$$

En remplaçant, dans l'égalité (1), S, s, s', s'' par leurs valeurs, il vient :

$$E^2F^2=e^2f^2+e'^2f'^2+e''^2f''^2.$$

Pour cette seconde partie, on aurait pu raisonner ainsi qu'il suit : l'aire de l'ellipse donnée est $\dfrac{\pi.E.F}{4}$; les aires des projections sont

$$\frac{\pi.e.f}{4},\quad \frac{\pi.e'.f'}{4},\quad \frac{\pi.e''.f''}{4};$$

donc, en vertu du théorème relatif aux projections des

aires planes,

$$\left(\frac{\pi.\mathrm{E}.\mathrm{F}}{4}\right)^2 = \left(\frac{\pi.e.f}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi.e'.f'}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi.e''.f''}{4}\right)^2;$$

d'où, en supprimant le facteur commun $\frac{\pi^2}{16}$,

$$\mathrm{E}^2\mathrm{F}^2 = e^2f^2 + e'^2f'^2 + e''^2f''^2.$$

C. Q. F. D.

Note du Rédacteur. — Une solution peu différente nous a été adressée de Lyon, dans une lettre anonyme; la même question a été résolue par M. A. M., élève du lycée de Douai, par MM. Laisant, sous-lieutenant du génie, licencié ès Sciences; Pelletreau, Rouquet; Melon, élève du collége Rollin, et par M. Moulin, répétiteur au Prytanée impérial de la Flèche.

SUR UN PROBLÈME D'ALGÈBRE LÉGALE (*) ET SUR UNE TRANSFORMATION DE SÉRIE;

PAR M. E. CATALAN.

Communiqué à la Société Philomathique, séance du 29 mars 1862.

I. D'après le Code civil (art. 757), *le droit de l'enfant naturel est d'un tiers de la portion héréditaire qu'il aurait eue, s'il eût été légitime* (**).

(*) *Voir*, pour ce problème, Quillet, *Nouvelles Annales*, t. IV, p. 253, et Louis Gros, t. X, p. 27.

(**) Cette partie de l'article 757 se rapporte au cas du partage entre enfants légitimes et enfants naturels. Lorsque des enfants naturels concourent avec des ascendants ou des collatéraux, la loi a des conséquences bizarres et même absurdes, dont je ne parlerai pas ici. (*Voyez* une brochure intitulée : *l'Article* 757, — *Application de l'Algèbre au Code civil.*)

Soient : l le nombre des enfants légitimes ; n le nombre des enfants naturels ; $x_{l,n}$ la part d'un enfant légitime ; $y_{l,n}$ la part d'un enfant naturel.

On a d'abord, en prenant pour unité la somme à partager entre les $l+n$ enfants,

$$(1) \qquad lx_{l,n} + ny_{l,n} = 1.$$

D'un autre côté, conformément à la prescription ci-dessus,

$$(2) \qquad y_{l,n} = \frac{1}{3} x_{l+1,\,n-1}.$$

De ces deux relations, on conclut aisément la formule suivante, connue depuis longtemps (*),

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_{l,n} &= \frac{1}{l} - \frac{n}{3l(l+1)} + \frac{n(n-1)}{3^2 l(l+1)(l+2)} - \ldots \\ &\pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{3^n l(l+1)\ldots(l+n)}. \end{aligned} \right.$$

II. La complication de cette formule est peut-être ce qui empêche les jurisconsultes d'obéir, sinon à l'esprit, du moins au texte de la loi, quand il s'agit pour eux d'effectuer un partage entre enfants légitimes et enfants naturels. Mais on peut la remplacer par une autre expression beaucoup plus commode.

On a en effet

$$\frac{1}{l(l+1)(l+2)\ldots(l+p)} = \frac{1}{1.2.3\ldots p} \int_0^1 (1-\theta)^p \theta^{l-1} d\theta;$$

(*) Elle a été donnée d'abord par M. Cournot (*Bulletin de Férussac*, t. XVI, p. 3).

donc

$$x_{l,n} = \int_0^1 \theta^{l-1} d\theta \left[1 - \frac{1}{3}\frac{n}{1}(1-\theta) + \frac{1}{3^2}\frac{n(n-1)}{1.2}(1-\theta)^2 - \ldots \pm \frac{1}{3^n}(1-\theta)^n \right]$$

$$= \frac{1}{3^n}\int_0^1 \theta^{l-1}(2+\theta)^n d\theta;$$

d'où enfin

$$(4)\quad x_{l,n} = \frac{1}{3^n}\left[2^n \frac{1}{l} + \frac{n}{1} 2^{n-1}\frac{1}{l+1} + \frac{n(n-1)}{1.2} 2^{n-2}\frac{1}{l+2} + \ldots + \frac{1}{l+n} \right].$$

Il est visible que, pour former la quantité entre parenthèses, il suffit de développer $(2+1)^n$ et de diviser par $l, l+1, l+2, \ldots, l+n$ les termes du développement. Du reste, il est facile de vérifier, par un procédé purement algébrique, l'équivalence des deux expressions de $x_{l,n}$.

III. Cette équivalence étant démontrée, il en résulte que l'on a

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{1}{l} - \frac{n}{l(l+1)}z + \frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}z^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{l(l+1)(l+2)(l+3)}z^3 + \ldots \\ = (1-z)^n \left[\frac{1}{l} + \frac{n}{1}\frac{1}{l+1}\left(\frac{z}{1-z}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{l+2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \ldots \right], \end{cases}$$

même quand les deux membres, au lieu d'être composés d'un nombre fini de termes, deviennent des séries *con-*

vergentes. Par exemple, en supposant

$$l = 1, \quad n = -1, \quad z = \frac{1}{2},$$

on trouve

$$1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right);$$

ce qui est exact.

IV. Si l'on pose

$$\frac{z}{1-z} = -t,$$

d'où résulte

$$z = \frac{-t}{1-t},$$

l'équation (5) devient

$$\frac{1}{l} - \frac{n}{1}\,\frac{1}{l+1}\,t + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{l+2}\,t^2 - \ldots$$
$$= (1-t)^n\left[\frac{1}{l} + \frac{n}{l(l+1)}\,\frac{z}{1-t} + \frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}\left(\frac{t}{1-t}\right)^2 + \ldots\right];$$

ou plutôt, *par le changement de t en z* :

$$(6)\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{l} - \frac{n}{1}\,\frac{1}{l+1}\,z + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{l+2}\,z^2 - \ldots \\ &= (1-z)^n\left[\frac{1}{l} + \frac{n}{l(l+1)}\,\frac{z}{1-z} + \frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

Cette seconde transformation est, pour ainsi dire, *conjuguée* de la première. On peut les renfermer dans la

double formule :

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
(1-z)^n &= \frac{\dfrac{1}{l} - \dfrac{n}{1}\dfrac{1}{l+1}z + \dfrac{n(n-1)}{1.2}\dfrac{1}{l+2}z^2 - \ldots}{\dfrac{1}{l} + \dfrac{n}{l(l+1)}\dfrac{z}{1-z} + \dfrac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}\left(\dfrac{z}{1-z}\right)^2 + \ldots}\\
&= \frac{\dfrac{1}{l} - \dfrac{n}{l(l+1)}z + \dfrac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}z^2 + \ldots}{\dfrac{1}{l} + \dfrac{n}{1}\dfrac{1}{l+1}\dfrac{z}{1-z} + \dfrac{n(n-1)}{1.2}\dfrac{1}{l+2}\left(\dfrac{z}{1-z}\right)^2 + \ldots}.
\end{aligned}
\right.
$$

Celle-ci a d'assez nombreuses conséquences, sur lesquelles je pourrai revenir dans une autre occasion.

DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉNONCÉS DANS LES NOUVELLES ANNALES

(voir t. XX, p. 83 et 140);

PAR M. ED. DEWULF,
Capitaine du Génie (à Bougie).

---

1. *La courbe enveloppe des cordes communes à une courbe fixe du degré m et aux courbes d'un faisceau du degré n, est de la classe $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)$.*

(E. DE JONQUIÈRES.)

Soient

$$F_m(x, y) = 0, \quad f_n(x, y) + \lambda\varphi_n(x, y) = 0, \quad y = px,$$

les équations de la courbe, du faisceau et d'une droite passant par l'origine.

Les équations

$$(1)\qquad F_m(x, px) = 0,$$

$$(2)\qquad f_n(x, px) + \lambda\varphi_n(x, px) = 0,$$

donnent les abscisses des points où la droite coupe la courbe et le faisceau. Éliminons x, et exprimons que la résultante R a deux racines p égales. L'équation de condition que nous obtiendrons ainsi ne renfermera plus que λ. Toutes les valeurs de λ qui satisferont à cette équation détermineront des courbes du faisceau qui auront avec $F_m = 0$ des cordes communes passant par l'origine.

Pour que $R = 0$ ait deux racines égales, il faut que $R = 0$ et $\frac{dR}{dp} = 0$ aient une racine commune.

La résultante R' de ces deux dernières équations sera du degré

$$m(mn - 1) + m^2 n$$

en λ, parce que $R = 0$ est du degré mn en p et du degré m en λ.

Parmi les valeurs de λ données par $R' = 0$ se trouvent : 1° celles qui déterminent les courbes du faisceau qui passent par les $m(m-1)$ points de contact des tangentes menées par l'origine à F_m ; 2° celles qui déterminent les $m(2n-1)$ courbes qui passent par les $m(2n-1)$ points d'intersection de F_m et de la courbe lieu des points de contact des tangentes menées par un point aux courbes d'un faisceau d'ordre n, courbe qui est de l'ordre $2n-1$, ainsi que nous le verrons plus loin.

Ces deux catégories de courbes ne satisfont pas, à proprement parler, à la question, les cordes communes qu'elles fournissent étant infiniment petites. Le degré de R' se réduira donc à

$$m(mn - 1) + m^2 n - m(m-1) - m(2n-1)$$

ou

$$m(m-1)(2n-1).$$

Chaque valeur de λ nous donne deux valeurs égales de p ;

on peut donc, par un point, mener $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)$ tangentes au lieu. C. Q. F. D.

2. *Une transversale tourne dans un plan autour d'un point fixe* S, *et rencontre à chaque instant, en m points, une courbe géométrique* C_m *de degré m, tracée dans ce plan; si l'on mène les tangentes et les normales à* C_m *en ces points d'intersection, les tangentes se coupent deux à deux sur une courbe* Σ, *et les normales se coupent aussi deux à deux sur une courbe* Σ'.

1° *Le degré de* Σ *est* $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$; *cette courbe passe par chacun des* $(m-2)$ *points de* C_m, *autres que les points de contact, qui sont situés sur chacune des* $m(m-1)$ *tangentes à* C_m *issues de* S. *Chacune des tangentes à* C_m, *en ses points d'inflexion ou de rebroussement, est une tangente multiple de* Σ *d'un ordre de multiplicité égal à* $m-1$.

2° *Le degré de* Σ' *est* $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-1)$. *Si l'on mène par* S *des parallèles aux m asymptotes de* C_m *et ensuite des normales à cette courbe en tous les points où ces parallèles la rencontrent à distance finie, on obtiendra d'abord* $m(m-1)$ *droites parallèles aux asymptotes de* Σ'. En outre, *il existe, sur* C_m, $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$ *paires d'éléments infiniment petits, parallèles deux à deux, et situés deux à deux sur des droites concourantes en* S. *Les normales en ces points, à* C_m, *sont les directions des autres asymptotes de* Σ'. On a, en effet,

$$m(m-1)+\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)=\frac{1}{2}m(m-1)(2m-1).$$

Les normales à C_m, *en ses points d'inflexion ou de*

rebroussement sont des tangentes à Σ' de l'ordre $m - 1$.

(E. DE JONQUIÈRES.)

Je vais déterminer le degré d'une courbe Σ'' résultant des intersections deux à deux de droites menées par les points où la transversale coupe C_m et faisant en ces points un angle α constant avec C_m.

Voyons en combien de points une transversale L coupe Σ''. Par tout point M de L on peut mener m^2 droites coupant C_m sous un angle constant, et les points d'intersection sont sur la première polaire inclinée de M par rapport à C_m (*voir* la *Théorie des polaires inclinées*, t. XVIII et XIX). Les premières polaires inclinées de tous les points de L forment un faisceau d'ordre m. Il y a donc autant de points de Σ'' sur L qu'il y a de cordes communes à ce faisceau F_m et à C_m, passant par S. D'après le théorème précédent, ce nombre est

$$\frac{1}{2} m(m-1)(2m-1).$$

Si $\alpha = 90°$, Σ'' devient Σ' et le degré ne change pas.

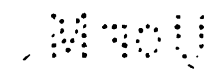
Si $\alpha = 0$, Σ'' devient Σ et le degré devient

$$\frac{1}{2} m(m-1)(2m-3),$$

parce que le degré du faisceau des premières polaires s'abaisse d'une unité.

Soit SA une tangente à C_m en un point α, SA coupe C_m en $m-2$ autres points. Soit α_k un de ces points : $\alpha_k\alpha$ représente deux tangentes menées de α_k à C_m; la corde de contact passe par S, donc α_k se trouve sur Σ.

Menons une transversale L passant par l'origine et par un point α d'inflexion de C_m. Les tangentes menées par les $m-1$ points, autres que α, où L coupe C_m, coupent la tangente en α en $m-1$ points β. Menons une trans-



versale $L\alpha'$ par un point α' infiniment voisin de α sur la courbe. Cette transversale coupe aussi C_m en $m-1$ points autres que α', et les tangentes à C_m en ces points coupent la tangente en α en $m-1$ points β' infiniment voisins des points β. Il y a donc $m-1$ éléments $\beta\beta'$ de Σ sur la tangente en α à C_m. C. Q. F. D.

Si l'on mène par S des parallèles aux m asymptotes de C_m et ensuite des normales à cette courbe en tous les points où ces droites la rencontrent à distance finie, on obtiendra d'abord $m(m-1)$ droites parallèles aux asymptotes de Σ'. Ceci est clair.

La droite de l'infini coupe Σ en $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$ points, et par chacun de ces points on peut mener une paire de tangentes dont les points de contact sont en ligne droite avec S et qui donnent sur C_m des éléments parallèles deux à deux, qui fournissent chacun une direction d'asymptote de Σ'. C. Q. F. D.

On démontrerait, comme plus haut, que les normales à C_m en ses points d'inflexion ou de rebroussement sont des tangentes à Σ' de l'ordre $m-1$.

On peut transporter ces propriétés à Σ''.

3. *Étant données dans un plan deux courbes géométriques, l'une C_m du degré m, et l'autre de la classe n; si une tangente roule sur celle-ci et que par les points où elle rencontre C_m on mène à cette courbe des tangentes et des normales :*

1° *Les tangentes se coupent deux à deux sur une courbe Σ_1 du degré $\frac{1}{2}mn(m-1)(2m-3)$.*

2° *Les normales se coupent deux à deux sur une courbe Σ'_1 de degré $\frac{1}{2}mn(m-1)(2m-1)$.*

(E. DE JONQUIÈRES.)

Cherchons le degré d'une courbe Σ''_1 résultant des intersections deux à deux de droites passant par les points où la tangente mobile coupe C_m et y faisant avec C_m un angle constant α.

Ce degré est égal au nombre des tangentes communes à la courbe Σ'', trouvée plus haut, et à la courbe de la classe n; il est donc égal à

$$\frac{1}{2}mn(m-1)(2m-1).$$

Le même raisonnement donne pour le degré de Σ'_1

$$\frac{1}{2}mn(m-1)(2m-1),$$

et pour celui de Σ_1

$$\frac{1}{2}mn(m-1)(2m-3).$$

Le procédé de démonstration appliqué au premier théorème ci-dessus peut aussi démontrer un théorème énoncé par M. Moutard : « *Étant données deux surfaces, l'une du degré m, l'autre du degré n; si d'un point* S *on projette tous les points de la courbe d'intersection sur un plan, cette courbe projection aura* $\frac{mn(m-1)(n-1)}{2}$ *points doubles.*

Note de M. Dewulf. — Voici comment M. Cremona démontre que le lieu Σ des points de contact des tangentes menées d'un point o à tous les courbes d'un faisceau F_n est de l'ordre $2n-1$ (*voir* son *Introduzione ad una teoria geometrica delle Curve piane*). Soit F'_n le faisceau des premières polaires de o par rapport à F_n. Les points où une courbe de F_n est coupée par la courbe correspondante de F'_n sont les points de contact des tangentes

à la première courbe issues de o; le lieu cherché est donc aussi le lieu des intersections des courbes correspondantes des deux faisceaux homographiques F_n et F'_n. Or, d'après un théorème de M. de Jonquières, le degré de ce lieu est égal à la somme des degrés des faisceaux, ou $2n-1$.

La courbe Σ, que nous venons de considérer, est aussi le lieu des points doubles des involutions de degré n que détermine un faisceau F_n sur toutes les droites qui passent par le point o. (*Voir* un Mémoire de M. de Jonquières, *Annali di Tortolini.*)

On peut démontrer les théorèmes suivants :

Quand le point o décrit une courbe de degré n, l'enveloppe des courbes Σ qui correspondent à chacune des positions de o est de l'ordre $m(2n-1)(2m-1)$.

Par un point il passe généralement $n(2n-3)$ droites qui déterminent dans un faisceau d'ordre n des involutions ayant un point quadruple.

Un faisceau de l'ordre n et une droite déterminent une involution de l'ordre n, le rapport anharmonique de quatre groupes de cette involution est constant, quelle que soit la droite, et quel que soit le pôle pris sur la droite, si les quatre groupes sont toujours déterminés par les quatre mêmes courbes.

Il résulte de ce théorème que la série des centres harmoniques des groupes de n points en involution que détermine un faisceau F_n sur une droite quelconque est homographique (ou projective) à la série des centres harmoniques de l'involution d'une autre droite quelconque, ou, en d'autres termes, que les involutions qu'un faisceau détermine sur deux droites sont toujours projectives. (*Voir* Cremona, *Introduzione,* etc., p. 18.)

Deux faisceaux homographiques (ou projectifs) déterminent sur deux droites des involutions projectives.

BIBLIOGRAPHIE.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; par M. *Jules de la Gournerie*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur de géométrie descriptive à l'École Polytechnique et au Conservatoire des Arts et Métiers. 1[re] partie : in-4 avec atlas de 52 planches; 1860. 2[e] partie : in-4 avec atlas de 52 planches; 1862. Paris, Mallet-Bachelier. — Prix des deux premières parties : 20 francs.

L'ouvrage complet doit se composer de trois parties ; les deux premières seulement sont publiées.

La première partie renferme quatre livres.

Dans le premier livre l'auteur expose les solutions des principaux *problèmes sur la ligne droite et le plan*.

Le second livre, qui traite *des cylindres*, *des cônes et des surfaces de révolution*, commence par un chapitre extrêmement intéressant sur les courbes planes et l'emploi des courbes d'erreur.

Puis viennent les problèmes sur les plans tangents et les sections planes. Le dernier chapitre, consacré aux intersections des surfaces courbes, est de beaucoup le plus important de cette première partie, tant par la nature des questions que par le choix des exemples : en particulier le problème de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont dans le même plan, est discuté aussi complétement que possible. Enfin, l'auteur indique les cas les plus fréquents où l'intersection de deux surfaces du second degré se décompose en deux courbes planes.

Le troisième livre, consacré à la *méthode des projec-*

tions cotées, renferme en quelques pages tout ce qu'il y a de véritablement utile dans cette méthode, et quelques exemples bien choisis en font saisir l'utilité et l'importance.

Dans le quatrième livre, qui traite de la perspective axonométrique et de la perspective cavalière, l'auteur est peut-être un peu trop concis, et quelques développements de plus sur la perspective axonométrique seraient fort utiles. Cependant les exemples variés que donne l'auteur suffisent, à la rigueur, pour faire comprendre l'emploi de ce mode de représentation des corps.

La seconde partie est divisée en trois livres.

Le premier livre, consacré aux *ombres linéaires*, renferme un très-grand nombre d'exemples tous heureusement choisis; les plus intéressants sont ceux relatifs aux ombres d'une niche sphérique représentée soit par une perspective axonométrique, soit par une perspective cavalière.

Le chapitre le plus important de ce livre est celui qui traite des figures homologiques. Cette belle théorie, créée par M. Poncelet, devait naturellement faire partie d'un cours de géométrie descriptive, puisque la projection d'une figure plane est homologique de cette figure. M. de la Gournerie est le premier qui ait introduit la notion des figures homologiques dans l'enseignement de la géométrie descriptive.

Dans le second livre, consacré aux *surfaces développables*, ces surfaces sont d'abord considérées comme l'ensemble des développantes d'une même courbe, ou, ce qui revient au même, comme l'ensemble des tangentes à une même courbe. Cette manière de considérer les surfaces développables a l'avantage de montrer immédiatement l'existence de l'arête de rebroussement.

Puis, revenant à la définition ordinaire des surfaces

développables, on voit que ces surfaces peuvent être considérées comme enveloppes d'un plan mobile.

Le mouvement de ce plan peut être dirigé de trois manières principales : 1° le plan peut être assujetti à rester tangent à deux surfaces données ; 2° ce plan peut rouler sur deux courbes données ; 3° ce plan peut rouler sur une courbe fixe en restant parallèle aux plans tangents d'un cône donné.

Comme exemples de surfaces développables, M. de la Gournerie a choisi la surface circonscrite à deux coniques, et la surface d'égale pente. En prenant une conique pour directrice d'une surface d'égale pente, on obtient la surface développable circonscrite à deux coniques. M. de la Gournerie donne les principales propriétés de cette surface.

Soient S_1 et S_2 deux surfaces du second degré ; elles se coupent suivant une courbe M ; par cette courbe on peut faire passer une infinité d'autres surfaces du second degré S_3, S_4, ..., S_n.... Parmi toutes ces surfaces se trouvent quatre cônes c, c', c'', c''' ; désignons les sommets de ces cônes par o, o', o'', o'''.

Si nous considérons deux quelconques de nos surfaces, S_m et S_n, par exemple, huit génératrices de S_m seront tangentes à S_n, et de même huit génératrices de S_n seront tangentes à S_m ; ce qui revient à dire que la courbe M touche huit génératrices de chacune des surfaces S_1, S_2, ..., S_n, qui passent par cette courbe. En effet, soit c l'un des cônes passant par la courbe M, o le sommet de ce cône et c_1 le cône circonscrit à la surface S_m et ayant son sommet en o, les deux cônes c et c_1 ont quatre plans tangents communs. Ces quatre plans coupent la surface S_m suivant huit génératrices, qui sont évidemment tangentes à la courbe M.

Si maintenant nous prenons les polaires réciproques

de toutes ces surfaces par rapport à une surface auxiliaire, aux surfaces du second degré S_1, S_2, S_3, S_4,..., S_n correspondent de nouvelles surfaces du second degré, Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4,..., Σ_n ; à la courbe M correspond une surface développable μ; aux cônes c, c', c'', c''' correspondent des coniques Δ, Δ', Δ'', Δ'''. La surface μ est circonscrite aux surfaces Σ_1, Σ_2,... et passe par les coniques Δ, Δ', Δ'', Δ''', qui seront évidemment des lignes doubles de cette surface; les plans de ces coniques sont les plans polaires des points o, o', o'', o'''.

Si nous considérons les huit tangentes de la courbe M qui sont situées sur la surface S_m, à ces droites correspondent huit génératrices de la surface μ situées sur la surface Σ_m. Les huit premières droites étant deux à deux dans des plans tangents aux cônes c, c', c'', c''', les huit autres se coupent deux à deux sur les courbes $\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta'''$.

Si l'on se donne directement les coniques Δ et Δ', elles déterminent la surface μ et par suite les deux autres lignes doubles Δ'', Δ'''. C'est en partant directement des courbes Δ et Δ' que M. de la Gournerie étudie la surface μ; il considère d'abord le cas où les plans de ces deux courbes sont parallèles, et établit ainsi les principales propriétés de cette surface; puis, en s'appuyant sur le principe des transformations homographiques, il en conclut que les propriétés trouvées, dans le cas particulier considéré, sont tout à fait générales.

Le troisième livre est consacré à la théorie *des surfaces gauches*.

Le premier chapitre renferme les principaux modes de génération du paraboloïde hyperbolique, la nature de ses sections planes et de ses courbes d'ombre.

Le second chapitre contient la théorie générale des surfaces gauches.

Le plan tangent d'une surface gauche n'étant pas le même tout le long de la génératrice, on est obligé, pour le construire, de recourir aux paraboloïdes de raccordement.

Si l'on considère un plan P quelconque passant par une génératrice G d'une surface gauche, ce plan touche toujours la surface en un point M de cette génératrice.

Si le plan P tourne autour de la droite G, le point M se déplace sur cette droite; il existe une relation très-simple entre l'angle décrit par le plan P et la longueur parcourue par le point M.

Soient deux droites quelconques A et B, *a* et *b* les points où ces deux droites sont rencontrées par leur plus courte distance. Un plan quelconque passant par la droite A coupe B en un point *m*, et l'on voit facilement que la tangente de l'angle que fait ce plan avec le plan passant par A et par *ab* est proportionnelle à *bm*. Quand le point *m* est en *b*, cet angle est nul; quand le point *m* est à l'infini, cet angle est droit.

Supposons maintenant que nos deux droites A et B soient deux génératrices infiniment voisines d'une surface gauche. Le point *a* est ce qu'on appelle le point central de la génératrice A. Le plan qui contient A et *ab* se nomme le plan central; enfin on appelle *obliquité* d'un plan passant par la génératrice A l'angle de ce plan avec le plan central. Alors, comme le point *m* devient le point de tangence M, on peut dire que la tangente de l'obliquité d'un plan tangent est proportionnelle à la distance du point de contact au point central. Le rapport de ces deux grandeurs est égal à l'angle des deux génératrices, divisé par leur plus courte distance; (*) on lui donne le nom de *paramètre de distribution*.

Les points centraux des diverses génératrices forment

(*) Ces théorèmes sont dus à M. Chasles. P.

une courbe à laquelle on a donné le nom de *ligne de striction*.

On appelle sommets d'une surface gauche les points singuliers où deux génératrices consécutives se rencontrent. Si le sommet s'éloigne à l'infini, la génératrice sur laquelle il se trouve prend le nom d'*arête*.

Toute ligne d'ombre d'une surface gauche passe par chaque sommet, et y est tangente à la génératrice; d'où il suit que les arêtes d'une surface gauche sont asymptotes de toutes les courbes d'ombre.

Ces théorèmes sont dus à M. de la Gournerie.

Les derniers chapitres renferment l'étude des principaux conoïdes, de l'hyperboloïde à une nappe, et du biais passé. Enfin l'ouvrage se termine par quelques notions sur la déformation des surfaces gauches.

« L'étude des différentes formes que peut prendre une » surface donnée, lorsqu'on la suppose flexible et inextensible, est en général un problème difficile; mais il se » simplifie beaucoup pour les surfaces gauches lorsqu'on » exige que les génératrices restent droites. D'après cette » condition, la déformation ne peut résulter que de plis » faits le long des génératrices. Une génératrice G′ tourne » autour de la génératrice voisine G en décrivant une » aire qui appartient à un hyperboloïde de révolution. » La position relative des deux génératrices n'est pas » modifiée, et par conséquent la valeur du paramètre de » distribution de G n'éprouve pas d'altération, et le point » central reste le même. »

On conclut de là ces deux théorèmes dus à M. Bour:

Il est toujours possible de déformer une surface gauche de manière à rendre ses génératrices parallèles à celles d'un cône donné ou à un plan.

Quand on déforme une surface gauche, l'angle de contingence de toutes les sections perpendiculaires à

une même génératrice varie précisément de la quantité dont on augmente ou dont on diminue l'angle de contingence correspondant du cône directeur.

En résumé, tous ceux qui veulent étudier sérieusement la géométrie descriptive doivent consulter le nouveau traité, où se trouvent réunis méthodiquement les principes de la géométrie générale, jusqu'alors demeurés épars dans divers ouvrages et dans de nombreux recueils.

Mais ce que nous avons surtout admiré dans ces leçons de géométrie descriptive, c'est la méthode d'enseignement suivie par M. de la Gournerie, méthode qui consiste à raisonner toujours d'une manière générale sans fatiguer l'attention par des détails inutiles. Cette façon large d'exposer les choses dans toute leur simplicité fait immédiatement comprendre le véritable esprit des méthodes, et développe l'intelligence des élèves en leur laissant voir à côté de chaque question étudiée toutes celles qui s'y rattachent. GROS.

DIE ELEMENTE DER MATHEMATIK.... ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES; par M. *Richard Baltzer*, professeur au Gymnase de Dresde. 2e partie : Planimétrie, Stéréométrie, Trigonométrie. Leipzig, 1862. 1 vol. in-8 de 382 pages.

L'auteur de la *Théorie des Déterminants*, dont il a été rendu compte dans le dernier volume des *Nouvelles Annales*, M. Baltzer, vient de faire paraître la seconde partie de son savant ouvrage sur les mathématiques élémentaires. Nous y trouvons, condensé dans un mince volume, un cours complet et détaillé de géométrie élémentaire et de trigonométrie, rédigé d'après un nouveau plan, et où

l'auteur s'est placé au point de vue élevé de la Géométrie moderne.

Commençons par donner un aperçu du contenu de ce traité, qui se divise en trois livres ayant pour objets respectifs la *Planimétrie* (Géométrie dans le plan), la *Stéréométrie* (Géométrie dans l'espace) et la *Trigonométrie*.

I.

Géométrie dans le plan (132 pages).

§ 1. *Notions fondamentales.* — Les premières notions de la Géométrie se rapportant à des objets indéfinissables qu'il s'agit plutôt de *montrer* que de déterminer par des énoncés rigoureux, nous ne trouvons aucun inconvénient sérieux à parler, dès le début, du nombre des dimensions des diverses espèces de figures. Nous eussions préféré cependant que l'auteur n'eût prononcé que plus tard les mots de *longueur* d'une ligne courbe ou d'*aire* d'une surface courbe, ces notions reposant sur des théorèmes à démontrer, sans lesquels elles ne peuvent être bien comprises.

Les définitions de la ligne droite et du plan sont discutées avec un soin que l'on n'est pas habitué à rencontrer dans nos traités de Géométrie, et qui montre à quel degré M. Baltzer s'est pénétré de l'esprit de rigueur des Anciens.

Il est un seul point sur lequel nous regrettons d'être en complet désaccord avec l'auteur : c'est au sujet de sa définition de l'angle et des conséquences qu'il en tire, d'après Bertrand (de Genève), pour éviter d'introduire, dans la théorie des parallèles, l'axiome connu improprement sous le nom de *postulatum* d'Euclide. Remplacer cet axiome, d'une évidence intuitive, par une démonstration fondée sur des définitions difficiles à saisir et sur

des considérations un peu vagues d'infinis de différents ordres, n'est-ce pas faire naître dans l'esprit du lecteur plus de doutes qu'on ne lui en ôte? Telle a toujours été l'opinion soutenue dans les *Nouvelles Annales* par le savant rédacteur qu'elles viennent de perdre; telle est encore l'opinion des géomètres qui font le plus autorité en ces matières (*). Nous faisons des vœux pour que M. Baltzer, dans la prochaine édition de son livre, mette sa théorie à l'abri des objections auxquelles elle reste toujours sujette, malgré tout le talent qu'il a mis à la perfectionner.

M. Baltzer établit, dans la notation des segments de lignes et des aires de triangles, la convention des signes dont la première idée est due à son illustre maître, M. Mœbius. D'après cette convention, on a, pour toute position du point A sur la droite BC ou dans le plan BCD, les relations

$$BC = BA + AC,$$
$$BCD = BCA + CDA + DBA.$$

On sait combien cette règle des signes est utile dans les démonstrations de la Géométrie supérieure. Elle sert aussi à formuler plus simplement un grand nombre de propositions de la Géométrie élémentaire.

§ 2. *Des angles des figures rectilignes.* — Théorie des parallèles, somme des angles d'un polygone, etc.

§ 3. *Des côtés des triangles.* — Relations entre les côtés et les angles opposés. Positions relatives de deux cercles. Tangentes.

§ 4. *Des figures inscrites ou circonscrites au cercle.* — Ce chapitre contient un grand nombre de propositions intéressantes et très-simplement démontrées.

(*) *Voyez* Duhamel, *Traité de Calcul infinitésimal*, t. I[er] p. 19.

§ 5. *Égalité des triangles.* — M. Baltzer, à l'exemple d'Euclide, appelle *égales et semblables* les figures *superposables* ou jouissant de l'*égalité* proprement dite, et *égales* celles que nous appelons ordinairement *équivalentes*. Nous conserverons, dans ce qui va suivre, les dénominations d'*égalité* et d'*équivalence*, avec le sens qu'on leur attache dans les traités français modernes.

§ 6. *Des diverses espèces de quadrilatères.*

§ 7. *Égalités des figures.* — L'auteur, par analogie avec ce qu'il fera plus tard en traitant de la similitude, introduit la considération du point que l'on pourrait appeler *centre d'égalité*, lequel est un point commun à deux figures égales. Il distingue l'égalité *de même sens* de l'égalité *de sens contraire* (symétrie), qui, dans le cas des figures planes, se ramène à la première par le retournement du plan. Propriétés des polygones réguliers.

§ 8. *Angle coupé par un système de parallèles.* — Théorie des lignes proportionnelles. Division harmonique, etc.

§ 9. *Équivalence des parallélogrammes et des triangles.* — Carré de l'hypoténuse. Théorèmes de Pappus, de Varignon, etc. Aire d'un polygone.

§ 10. *Mesure des aires.* — Quadrature des aires planes en général.

§ 11. *Similitude des triangles.*

§ 12. *Similitude des figures.* — Deux figures sont semblables lorsque tous leurs points sont déterminés, par rapport à deux bases données, par deux systèmes de triangles semblables chacun à chacun. Eléments homologues à eux-mêmes (centres de similitude). Similitude de deux cercles.

§ 13. *Cyclométrie.* — Détermination approchée du rapport de la circonférence au diamètre. Notions sur la courbure.

§ 14. *Produits et carrés de lignes droites.* — Puissance d'un point par rapport à un cercle. Lignes d'égale puissance (axes radicaux). Pôles et polaires. Faisceaux de cercles. Théorème de Ptolémée, etc.

§ 15. *Périmètres et aires des figures.* — Maximum de l'aire des figures isopérimètres.

II.

Géométrie dans l'espace (129 pages).

§ 1. *Intersection des plans et des droites.* — Droites et plans parallèles. Surfaces réglées, etc.

§ 2. *Angles et distance des plans et des droites.* — Projections, etc.

§ 3. *Cône, cylindre et sphère.* — Leurs sections circulaires, etc.

§ 4. *Géométrie de la sphère.* — L'auteur fait ressortir avec soin, dans ce chapitre, le principe de dualité (triangles polaires, etc.) et les analogies et les différences entre les propriétés des figures sphériques et celles des figures planes.

§ 5. *Angles solides, prismes, figures perspectives.* — Collinéation (homographie). Projection stéréographique, etc.

§ 6. *Tétraèdre et parallélépipède* (*). — Égalité et similitude des figures dans l'espace.

§ 7. *Des polyèdres.* — Théorème d'Euler (ou plutôt de Descartes) sur le nombre des sommets, des faces et des arêtes d'un polyèdre. Polyèdres réguliers, semi-réguliers, étoilés, etc.

§ 8. *Cubature des prismes et des pyramides.* — Théorèmes de Monge, de Mœbius, de Steiner.

(*) Et non *parallélipipède*.

§ 9. *Cubature de la sphère et d'autres solides.* — Théorème : Si une surface réglée quelconque est coupée par deux plans parallèles suivant deux courbes fermées, le volume du segment compris entre ces plans est égal à la moyenne arithmétique entre les cylindres de même hauteur qui ont pour bases les sections parallèles, diminuée de la moitié du cône dont les génératrices sont parallèles à celles de la surface réglée, et qui a son sommet sur l'un des plans, sa base sur l'autre. On en déduit simplement le volume du tronc de pyramide, etc.

§ 10. *Aires du cylindre, du cône et de la sphère.*

§ 11. *Centres de gravité des figures.* — Cette théorie, dont l'auteur fait connaître de nombreuses applications à la géométrie, est établie d'une manière purement géométrique, sans rien emprunter aux principes de la statique.

III.

Trigonométrie (114 pages).

Cette partie de l'ouvrage forme un traité très-développé, où l'auteur s'est toujours préoccupé de donner à ses résultats la plus grande généralité possible. Les nombreux exemples numériques qu'on y rencontre sont calculés à l'aide de tables logarithmiques à quatre décimales.

§ 1. *Du sinus.* — Applications aux triangles, etc.

§ 2. *Du cosinus.* — Applications aux triangles, etc.

§ 3. *De la tangente et de la cotangente.* — Formules pour la résolution des triangles. Problème de Pothenot, etc.

§ 4. *Goniométrie.* — Ce chapitre contient les propriétés des fonctions circulaires démontrées par les procédés généraux de la nouvelle Géométrie, ainsi que les formules les plus importantes relatives aux triangles, aux quadrilatères, etc.

§ 5. *Trigonométrie sphérique.* — Les formules de la trigonométrie sphérique sont étendues, d'après M. Mœbius, au cas des triangles dont les côtés surpassent un demi-cercle. — Théorèmes de Lexell, de Legendre, etc.

§ 6. *Polygonométrie et Polyédrométrie.* — Ce chapitre renferme le développement d'importantes propositions, dont la plupart ont été indiquées dans les dernières sections de la *Théorie des Déterminants.* — Au moyen d'un principe fondamental, déjà établi au n° 3 du § 18 de ce dernier ouvrage, on déduit, de chaque relation polygonométrique, un relation polyédrométrique correspondante.

§ 7. *Des Propriétés projectives.* — On trouve dans ce chapitre une excellente introduction à l'étude des travaux des inventeurs de la Géométrie nouvelle, de MM. Poncelet, Mœbius, Chasles, Steiner, etc.

D'après cette analyse, bien incomplète, on voit quelle richesse de matériaux renferme ce remarquable traité.

Un des plus éminents services que M. Baltzer ait rendus par cette publication, c'est d'avoir cité, pour chaque proposition, les noms des auteurs auxquels elle est due. Ces indications historiques sont faites avec la consciencieuse érudition qui rend si précieuses les notes placées au bas des pages de la *Théorie des Déterminants.*

Dans sa préface, M. Baltzer va au-devant d'une objection que l'on avait déjà faite à la première partie de son cours, lorsqu'elle a paru il y deux ans. Un livre où les matières sont aussi serrées et traitées de si haut ne serait guère accessible à un commençant, livré à lui-même et doué seulement d'une intelligence ordinaire. Mais l'intention de l'auteur n'a pas été de composer un traité pour les lecteurs privés du secours d'un maître, ou, comme on dit en Allemagne, *für den Selbstun-*

terricht. Il n'a pas voulu non plus rédiger une suite de leçons que le maître n'aurait plus qu'à développer dans l'ordre où elles se succèdent. Son but, en composant un traité où tout le monde trouvera à s'instruire, a été de classer méthodiquement les matières qui pourront faire le sujet de l'enseignement, et que le professeur devra présenter dans l'ordre qui lui semblera le plus convenable et le mieux approprié aux besoins de ses élèves; et à ceux-ci il offre en même temps un résumé substantiel et précis des leçons qu'ils auront suivies.

Nous pensons que l'auteur a complétement réussi dans cette utile entreprise, et nous ne doutons pas que son livre ne soit accueilli avec empressement par tous les lecteurs familiers avec la langue allemande. Il serait bien à désirer que la publication d'une édition française aidât bientôt cet ouvrage à se répandre dans notre pays, où l'on trouve si peu de traités élémentaires qui soient en rapport avec les progrès de la Géométrie, progrès auxquels les savants français ont tant contribué!

Nous pourrions citer encore un grand nombre d'excellents ouvrages, publiés récemment à l'étranger, et qui, faute d'une traduction, resteront inconnus en France. Jadis les savants de l'Europe entière se servaient tous de la même langue, et les productions scientifiques circulaient dans tous les pays où chacun comprenait et écrivait le latin. Aujourd'hui chacun écrit dans sa langue maternelle, et nous sommes loin de considérer comme un progrès cette tendance ultra-nationale, dont les effets sont si peu en harmonie avec l'élan général qui porte les peuples modernes à lier entre eux un commerce plus intime. Pour se tenir au courant des travaux qui se font hors de son pays, l'homme de science doit consacrer beaucoup de temps à s'initier aux langues des nations savantes, et, à mesure que le mouvement scientifique pénètre chez un

nouveau peuple, c'est un nouvel idiome à étudier. Autrement, on est obligé, pour imprimer des traductions d'un livre dans les diverses langues, de faire trois ou quatre fois les mêmes frais qu'a coûté la publication primitive. De là résulte que peu d'ouvrages sont traduits, et parmi ceux qui ne le sont pas, très-peu sont connus à l'étranger. Si Leibniz et les Bernoulli avaient écrit en allemand, qui sait combien de temps l'invention du calcul infinitésimal eût mis à parvenir en France!

Nous ne demanderions pas, toutefois, que tous les livres de science, sans distinction, fussent rédigés en latin. Mais si, d'un côté, il nous semble avantageux que les traités élémentaires, destinés à populariser les découvertes, soient écrits en langue vulgaire, afin de ne pas ajouter la difficulté de la traduction à celle du sujet; d'autre part, il serait bien à souhaiter que les savants, dont les publications doivent recruter leurs lecteurs dans tous les pays, se décidassent à revenir à la langue de Newton, d'Euler et de Gauss, dont l'emploi a si puissamment contribué à répandre le nom de ces grands hommes hors de leur patrie.

HOÜEL,
Professeur à la Faculté des Sciences
de Bordeaux.

ANALOGIES DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE. CERCLE DES NEUF POINTS, SPHÈRE DES DOUZE POINTS.

Triangle.

1. Soient ABC un triangle, α, β, γ les milieux des côtés BC, AC, AB, O le centre du cercle circonscrit. Menons $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ et prolongeons ces droites jusqu'en

A′, B′, C′ de telle sorte que

$$OA' = 2O\alpha,\quad OB' = 2O\beta,\quad OC' = 2O\gamma.$$

Les deux triangles A′ B′ C′ et ABC auront leurs côtés parallèles et seront égaux, mais inversement situés.

2. Si l'on fait sur le triangle A′B′C′ la même opération que sur le triangle ABC, on retrouvera ce dernier triangle. Il y a donc entre ces deux triangles une sorte de réciprocité : nous dirons qu'ils sont *conjugués*.

3. Les mêmes lettres désignant les points homologues des deux triangles conjugués, O est le point de concours des hauteurs de A′B′C′ et O′ le point de concours des hauteurs de ABC.

4. Les triangles ABC, A′B′C′, $\alpha\beta\gamma$ sont semblables deux à deux et ont respectivement pour centres de similitude :

ABC, A′B′C′, le milieu M de OO′;

ABC, $\alpha\beta\gamma$, le centre de gravité G de ABC ;

A′B′C′, $\alpha\beta\gamma$, le point O centre du cercle circonscrit à ABC.

D'après un théorème connu, les points O, G, M sont en ligne droite; mais O, M, O′ sont aussi en ligne droite; donc O, G, O′ sont en ligne droite. Par conséquent :

Le centre du cercle circonscrit à un triangle, le centre de gravité et le point de concours des hauteurs sont trois points en ligne droite.

5. Le point O′, considéré comme appartenant au triangle ABC, a pour homologue le point O dans le triangle $\alpha\beta\gamma$, car O′ et O sont les points de concours des hauteurs dans ces deux triangles. Donc, puisque G est le centre de similitude et que le rapport de similitude est 2, on aura

$$O'G = 2OG.$$

6. Le point M, milieu de OO′, est le centre du cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$. En effet, de

$$OM = \frac{1}{2} OO', \quad OG = \frac{1}{3} OO',$$

on conclut

$$OG = \frac{2}{3} OM = \frac{2}{3}(OG + GM),$$

d'où

$$OG = 2GM.$$

Donc le point M est, dans le triangle $\alpha\beta\gamma$, l'homologue du point O dans le triangle ABC. Mais O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Donc, etc.

7. Le point M est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ égal au triangle $\alpha\beta\gamma$. Il en résulte que les six points α, β, γ, α', β', γ' sont sur un même cercle.

8. Les points α et α' étant homologues dans les deux triangles ABC et A′B′C′, la droite $\alpha\alpha'$ passe par le point M qui est son milieu. Mais si Ap est la perpendiculaire abaissée de A sur le côté BC, le triangle $\alpha' p \alpha$ étant rectangle en p, on aura

$$Mp = M\alpha = M\alpha',$$

et le point p sera encore sur la circonférence du numéro précédent. De là résulte que :

1° *Les milieux* α, β, γ *des côtés d'un triangle ;* 2° *les milieux* α', β', γ' *des portions des hauteurs comprises entre les sommets et le point de concours des hauteurs ;* 3° *les pieds* p, q, r *des hauteurs, sont neuf points situés sur une même circonférence.*

Le centre de cette circonférence est au milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de concours des hauteurs.

Le rayon de cette circonférence est la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle proposé.

Cette dernière partie résulte de ce que le rapport de similitude des triangles ABC et $\alpha\beta\gamma$ est 2.

Tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent.

I (*). Soient ABCD un tétraèdre, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les centres de gravité de ses faces. Si les quatre hauteurs se rencontrent en un même point, on peut démontrer que les perpendiculaires élevées aux faces par les points α, β, γ, δ se rencontrent en un certain point. Soit O ce point.

Cela posé, menons $O\alpha$ et prenons sur la même direction $OA' = 3O\alpha$, et opérons de la même manière relativement aux autres faces : nous obtiendrons les sommets d'un tétraèdre $A'B'C'D'$ égal au proposé, mais inversement situé. Les faces homologues ABC, $A'B'C'$, etc. sont parallèles.

II (**). Si l'on fait sur le tétraèdre $A'B'C'D'$ la même opération que sur ABCD, on retrouvera ce dernier tétraèdre. Il y a donc entre ces deux tétraèdres une certaine réciprocité qui nous engage à leur donner le nom de *tétraèdres conjugués*.

III. Les mêmes lettres désignant les points homologues, le point O, point de concours des normales menées aux faces de ABC par les centres de gravité de ces faces, est le point de concours des hauteurs du tétraèdre $A'B'C'D'$, et réciproquement le point O', où se rencontrent les normales élevées en α', β', γ', δ' aux faces du dernier tétraèdre, est le point de concours des hauteurs du premier.

(*) A démontrer.
(**) A démontrer.

IV. Les tétraèdres ABCD, A′B′C′D′, $\alpha\beta\gamma\delta$ sont semblables et leurs centres de similitude sont respectivement :

Pour ABCD et A′B′C′D′, le milieu M de OO′;

Pour ABCD et $\alpha\beta\gamma\delta$, le centre de gravité G de ABCD;

Pour A′B′C′D′ et $\alpha\beta\gamma\delta$, le point O.

D'après un théorème connu, les points M, G et O sont en ligne droite; mais O, M et O′ sont aussi en ligne droite; donc il en sera de même pour les points O, G et O′. Ainsi :

Dans un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent, le point de concours des normales menées aux faces par leurs centres de gravité, le centre de gravité du tétraèdre et le point de concours des hauteurs sont trois points en ligne droite.

V. Le point O′, considéré comme appartenant au tétraèdre ABCD, a pour homologue le point O dans le tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$, car O et O′ sont, dans ces deux tétraèdres, les points de concours des hauteurs. Donc, puisque G est le centre de similitude des tétraèdres ABCD et $\alpha\beta\gamma\delta$ dont le rapport de similitude est 3, on aura

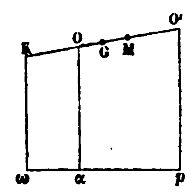
$$O'G = 3OG.$$

IV *bis* (autre analogue du n° 4). Soient p, q, r, s les projections des sommets du tétraèdre ABCD sur les faces opposées, points qui sont aussi les projections du point O′ sur ces faces. Nommons K le centre de la sphère circonscrite et ω la projection de K sur la face BCD ou le centre de la circonférence circonscrite à BCD. On sait que dans le tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent, la projection d'un sommet sur la face opposée est le point de concours des hauteurs de cette face. Donc les points p, α et ω sont en ligne droite (n° 4). Par conséquent les points

O', G, K ont leurs projections en ligne droite sur une face quelconque du tétraèdre. Donc ces trois points sont en ligne droite. Ainsi :

Dans un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent, le point de concours des hauteurs (O'), *le centre de gravité du tétraèdre* (G) *et le centre de la sphère inscrite* (K), *sont trois points en ligne droite.*

VI. Le point M, milieu de OO', est le centre de la



sphère circonscrite au tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$. En effet, puisque

$$\omega\alpha = \frac{p\alpha}{2} \quad (\text{n}^\circ\ 4),$$

on aura

$$\text{KO} = \frac{\text{OO}'}{2} = \text{OM},$$

et puisque G est le milieu de OM, on aura

$$\text{KG} = 3\text{GM}.$$

Donc le point M est dans le tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$ l'homologue du point K dans le tétraèdre proposé, et par suite M est le centre de la sphère circonscrite à $\alpha\beta\gamma\delta$.

VII. Le point M est aussi le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ qui est égal au tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$. Il en résulte que les huit points α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' sont sur une même sphère.

VIII. Les points α et α' étant homologues dans les

deux tétraèdres conjugués ABCD, A′B′C′D′, la droite $\alpha\alpha'$ passe par le point M, et comme le triangle $\alpha' p \alpha$ est rectangle en p, on aura

$$Mp = M\alpha = M\alpha'.$$

Donc le point p est sur la sphère du numéro précédent. On a donc ce théorème :

Dans un tétraèdre ABCD dont les hauteurs se rencontrent :

1° *Les centres de gravité* α, β, γ, δ *des faces;* 2° *les points* α', β', γ', δ' *placés aux deux tiers des droites qui vont de chaque sommet au point de concours des hauteurs;* 3° *les pieds* p, q, r, s *des quatre hauteurs, sont douze points situés sur la même sphère.*

Le centre de cette sphère est au milieu de la droite qui joint le point de concours des hauteurs au point de concours des normales menées à chaque face par son centre de gravité.

Enfin le rayon de cette sphère est le tiers du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre proposé. P.

SUR UNE QUESTION RELATIVE A LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE;

PAR M. ABEL TRANSON.

L'article de M. Baehr, ci-dessus, p. 35, m'engage à revenir sur la question proposée au concours d'agrégation de l'année 1849.

Il s'agissait de trouver la condition pour que des droites, issues des différents points d'une surface donnée S, avec des cosinus de direction exprimés par les fonctions X, Y, Z, soient normales à une même surface.

La condition indiquée par M. Dieu (rappelée ci-dessus, p. 47) me paraît manquer de généralité. En effet, elle exige que la fonction différentielle $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ satisfasse à la condition connue d'intégrabilité. Or, en étudiant les propriétés d'un *ensemble de droites menées de tous les points de l'espace suivant une loi continue*, j'ai montré ailleurs (*) qu'il existe une infinité de surfaces satisfaisant à la condition du concours de 1849, c'est-à-dire au moyen desquelles les droites en question se groupent en systèmes normaux à des surfaces déterminées; et cela sans que les fonctions X, Y, Z soient assujetties à aucune condition, notamment sans que la condition d'intégrabilité doive être satisfaite.

D'ailleurs je m'empresse d'ajouter que M. Dieu lui-même a donné dans son travail (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 66-70) la vraie condition des surfaces S sous la forme (1)

$$D_y(X + pZ) = D_x(Y + qZ),$$

qui, développée, devient l'équation linéaire aux différentielles partielles

$$\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) p + \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right) q = \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx};$$

de sorte que si $F = 0$ est l'équation de l'une des surfaces demandées, la fonction F doit satisfaire à la condition

$$\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) \frac{dF}{dx} + \left(\frac{dF}{dx} - \frac{dY}{dz}\right) \frac{dF}{dy} + \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) \frac{dF}{dz} = 0.$$

Telle est l'unique condition des surfaces S dont l'exis-

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIIIe cahier.

tence en nombre illimité se trouve ainsi démontrée. Mais M. Dieu ne s'arrête pas à développer la condition (1); il la suppose à tort relative exclusivement à quelque forme particulière de l'équation des surfaces S. Cependant la condition à laquelle il s'arrête finalement ne demeure vraie que sous la réserve d'être énoncée comme il suit :

Si le trinôme $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$ *satisfait à la condition d'intégrabilité, il faut que le facteur propre à le rendre intégrable soit, en vertu de l'équation de la surface donnée, une fonction de l'intégrale.*

C'est alors un théorème dont la démonstration repose sur une propriété remarquable du facteur d'intégrabilité de la fonction différentielle $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$, savoir que μ étant ce facteur, U étant l'intégrale et F une fonction satisfaisant à la condition (2)

$$\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dz} - \frac{d\mathrm{Z}}{dy}\right)\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \left(\frac{d\mathrm{Z}}{dx} - \frac{d\mathrm{X}}{dz}\right)\frac{d\mathrm{F}}{dy} + \left(\frac{d\mathrm{X}}{dy} - \frac{d\mathrm{Y}}{dx}\right)\frac{d\mathrm{F}}{dz} = 0,$$

μ est nécessairement une fonction de U et de F.

Imaginons en effet qu'on ait porté dans μ les valeurs de x et y tirées des équations

$$\mathrm{U} = \varphi(x, y, z), \quad \mathrm{F} = \psi(x, y, z),$$

il est aisé de voir que μ ne contiendra plus z, c'est-à-dire que sa dérivée prise par rapport à z sans faire varier U ni F sera nulle.

Cette dérivée ainsi définie est

$$\left(\frac{d\mu}{dz}\right) = \frac{d\mu}{dx}\frac{dx}{dz} + \frac{d\mu}{dy}\frac{dy}{dz} + \frac{d\mu}{dz},$$

dans laquelle $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ seront tirées des deux équations

$$\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dz}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dz}+\frac{dU}{dz}=0,$$
$$\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dz}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dz}+\frac{dF}{dz}=0.$$

Or, on pourra remplacer dans la première les quantités $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$ par les quantités proportionnelles X, Y, Z, et alors, si l'on a égard à la condition d'intégrabilité

$$\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right)X+\left(\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right)Y+\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)Z=0,$$

aussi bien qu'à l'équation ci-dessus (2) qui assujettit F, on reconnaîtra aisément que les valeurs de $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ sont respectivement égales à

$$\frac{\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}}{\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}},\qquad \frac{\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dy}}{\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}},$$

lesquelles étant reportées dans la valeur de $\left(\frac{d\mu}{dz}\right)$ donnent un résultat qui est identiquement nul d'après les conditions auxquelles doit satisfaire le facteur d'intégrabilité.

Revenons maintenant à la surface requise par le concours de 1849. On voit que si l'équation de cette surface rend le facteur d'intégrabilité une fonction de l'intégrale lorsque le facteur d'intégrabilité et par suite l'intégrale existent; c'est que dans tous les cas, c'est-à-dire que le facteur existe, ou non, la surface demandée est de celles qui satisfont à l'équation (2).

Théorème à démontrer.

Lorsque plusieurs forces situées dans un même plan tournent ensemble d'un même angle autour de leurs points d'application respectifs, on sait que la résultante tourne du même angle autour d'un point fixe qu'on appelle *centre des forces*. C'est une généralisation de la propriété du *centre des forces parallèles*.

Supposons maintenant qu'une première force P tourne dans le plan commun en demeurant tangente à un cercle fixe de rayon r; qu'une seconde force P' tourne du même angle en demeurant tangente à un autre cercle r', et ainsi des autres. La résultante de ces forces tournera aussi d'un même angle autour d'un cercle facile à déterminer.

1° Le cercle directeur de la résultante aura pour centre le point qui serait le centre des forces P si les rayons de leurs cercles respectifs s'évanouissaient; 2° il aura le même rayon que si tous les cercles directeurs des forces, en conservant leurs rayons, devenaient concentriques.

Ce théorème conduit à la question suivante : Soit un ensemble de forces situées dans un même plan et tournant simultanément du même angle en demeurant tangentes à des courbes directrices; leur résultante tournera du même angle en demeurant tangente à une certaine courbe qu'on appellera la *directrice résultante.* Et si, dans une situation particulière du système, on considère les cercles osculateurs des directrices composantes, auront-ils avec le cercle osculateur de la directrice résultante les mêmes relations de position et de grandeur qu'auraient des cercles directeurs composants avec un cercle directeur résultant?

En cas d'affirmative, il serait intéressant d'illustrer le théorème par quelque exemple où la directrice résultante serait déduite des directrices composantes.

MÉTHODE POUR TROUVER L'ÉQUATION DE LA DÉVELOPPÉE DE L'ELLIPSE;

PAR M. L. TAILLIER,
Professeur de Mathématiques.

Considérons le cercle décrit sur le grand axe AOA' de l'ellipse, dont le centre est O. Soient M un point de ce cercle, N le point correspondant de l'ellipse; x', y' les coordonnées de N, et φ l'angle MOA. On a

$$x' = a\cos\varphi \quad \text{et} \quad y = b\sin\varphi.$$

L'équation de la normale au point (x', y') est

$$b^2 x' y - a^2 y' x + c^2 x' y' = 0,$$

ou, en remplaçant x', y' par leurs valeurs,

$$(1) \qquad by\cos\varphi - ax\sin\varphi + c^2\sin\varphi.\cos\varphi = 0.$$

Pour avoir le lieu des intersections successives, il faut éliminer φ entre l'équation (1) et sa dérivée. En divisant cette équation par $\cos\varphi$, elle devient

$$by - ax\,\text{tang}\,\varphi + c^2\sin\varphi = 0,$$

et sa dérivée donne

$$-\frac{ax}{\cos^2\varphi} + c^2\cos\varphi = 0;$$

d'où

$$\cos\varphi = \left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

En divisant l'équation (1) par $\sin\varphi$, on a

$$by\cot\varphi - ax + c^2\cos\varphi = 0,$$

et de la dérivée on tire

$$\sin\varphi = -\left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Substituant à $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ ces valeurs dans

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

il vient

(2) $$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Cette méthode ne peut être employée pour l'hyperbole; mais pour avoir l'équation de la développée de cette courbe, il suffira de changer b^2 en $-b^2$ dans l'équation (2); on a ainsi

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

QUESTION.

647. Sur toutes les tangentes à une ellipse, et à partir de leurs points de contact, on porte une longueur constante : on demande l'équation du lieu des extrémités de ces droites. Examiner la forme du lieu représenté par cette équation, et expliquer les circonstances particulières que l'on rencontre lorsque la longueur constante se réduit à zéro.

(MOUTARD.)

SOLUTIONS DES QUESTIONS 608 ET 637

(voir 2e série, t. Ier, p. 80, et t. II, p. 24);

PAR M. HARANG,
Élève en mathématiques spéciales du lycée de Douai
(classe de M. Painvin).

Question 608.

Énoncé. — Posons

$$(1)\quad K = 4(ae - 4bd + 3c^2)(bf - 4ce + 3d^2) - (af - 3be + 2cd)^2,$$

$$(2)\quad H = b^2 - ac,$$

$$(3)\quad I = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$(4)\quad J = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Alors

$$(5)\qquad \frac{1}{4}\left(\frac{dK}{df}\right)^2 = 4HI^2 - 12aIJ - a^2K.$$

(MICHAEL ROBERTS.)

Prenons la dérivée de (1) par rapport à f:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dK}{df}\right) = 2(ae - 4bd + 3c^2)b - (af - 3be + 2cd)a,$$

ou

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dK}{df}\right) = 2bI - a(af - 3be + 2cd).$$

Élevons au carré :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{dK}{df}\right)^2 = 4b^2I^2 - 4abI(af - 3be + 2cd) + a^2(af - 3be + 2cd)^2.$$

Il faut donc démontrer que

$$4b^2I^2 - 4abI(af - 3be + 2cd) + a^2(af - 3be + 2cd)^2$$
$$= 4HI^2 - 12aIJ - a^2[4I(bf - 4ce + 3d^2)] + a^2(af - 3be + 2cd)^2.$$

En supprimant le terme commun $a^2(af - 3be + 2cd)^2$, et en remplaçant H par sa valeur $b^2 - ac$, cette égalité se réduit à

$$- 4abI(af - 3be + 2cd)$$
$$= - 4acI^2 - 12aJ - a^2[4I(bf - 4ce + 3d^2)],$$

ou

$$b(af - 3be + 2cd) = cI + 3J + a(bf - 4ce + 3d^2).$$

Substituant à I sa valeur $ae - 4bd + 3c^2$, il vient

$$b(af - 3be + 2cd) = ace - 4bcd + 3c^3 + 3J + a(bf - 4ce + 3d^2),$$

d'où

$$J = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Ce qui est vrai d'après l'équation (4).

Question 637.

Énoncé. — *Les quatre faces d'un tétraèdre* ABCD *passent chacune par un point fixe; les trois côtés* AB, AC, CB *de l'une des quatre faces sont assujettis à rester chacun sur un plan fixe: trouver le lieu géométrique du sommet,* D, *du tétraèdre, opposé à cette face.*

Ce lieu est en général une surface du troisième degré, qui se réduit à un cône du second degré quand les quatre points fixes sont situés sur un même plan.

(R. Salmon.)

Je prendrai pour plans de coordonnées les trois plans fixes. Les équations des côtés AB, AC, CB, situés dans ces plans, sont alors,

$$\text{AB}\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{c} z = 0, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0 \end{array} \right\};$$

$$\text{AC} \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{c} y = 0, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} - 1 = 0 \end{array} \right\};$$

$$\text{CB} \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{c} x = 0, \\ \dfrac{z}{c} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0 \end{array} \right\}.$$

Soient $(\alpha, 6, \gamma)$, $(\alpha_1, 6_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, 6_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, 6_3, \gamma_3)$, les coordonnées des quatre points fixes. Le plan CDA aura pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 1 + \lambda y = 0.$$

Il doit passer par le point $(\alpha_1, 6_1, \gamma_1)$, donc

$$\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\gamma_1}{c} - 1 + \lambda 6_1 = 0,$$

d'où

$$\lambda = - \frac{\dfrac{\alpha_1}{a} + \dfrac{\gamma_1}{c} - 1}{6_1}.$$

L'équation du plan CDA est donc

$$(1) \qquad \frac{1}{a}(6_1 x - \alpha_1 y) + \frac{1}{c}(6_1 z - \gamma_1 y) + y - 6_1 = 0.$$

De même, l'équation du plan BCD, passant par la droite BC et par le point $(\alpha_2, 6_2, \gamma_2)$, sera

$$(2) \qquad \frac{1}{b}(\alpha_2 y - 6_2 x) + \frac{1}{c}(\alpha_2 z - \gamma_2 x) + x - \alpha_2 = 0;$$

et le plan BDA aura pour équation

$$(3) \qquad \frac{1}{a}(\gamma_3 x - \alpha_3 z) + \frac{1}{b}(\gamma_3 y - 6_3 z) + z - \gamma_3 = 0.$$

Les quatre points A, B, C, (α, β, γ) sont dans un même plan, on a donc

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1. \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

(4) $$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} - 1 = 0 \text{ (*)}.$$

Pour avoir l'équation du lieu cherché, il suffit d'éliminer $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ entre les équations (1), (2), (3), (4); le lieu aura donc pour équation

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha_2 y - \beta_2 x) & (\alpha_2 z - \gamma_2 x) & (x - \alpha_2) \\ (\beta_1 x - \alpha_1 y) & 0 & (\beta_1 z - \gamma_1 y) & (y - \beta_1) \\ (\gamma_3 x - \alpha_3 z) & (\gamma_3 y - \beta_3 z) & 0 & z - \gamma_3 \\ \alpha & \beta & \gamma & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui représente une surface du troisième degré (**).

(*) L'équation (4) s'obtient immédiatement en observant que le plan ABC a pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0,$$

et que le point (α, β, γ) est sur ce plan. P.

(**) Il reste à prouver que le lieu se réduit à un cône du second degré quand les quatre points donnés sont situés dans un même plan. P.

SOLUTION DE LA QUESTION 639;

PAR M. LÉON LHUILLIER,
Elève à Nancy.

ÉNONCÉ. — *Trouver sur la surface d'un paraboloïde hyperbolique le lieu géométrique d'un point tel, que les deux génératrices rectilignes menées par ce point fassent un angle donné.*

Cas particulier où l'angle donné est droit.

Soient

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = \lambda, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{x}{\lambda},$$

et

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \mu, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{x}{\mu},$$

les équations de deux génératrices rectilignes menées par un point de la surface.

Si l'on représente par φ l'angle donné, et par a, b, a', b' les coefficients angulaires des projections de ces génératrices, la condition de l'énoncé se traduit par l'équation

$$\cos\varphi = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}.$$

Or, on a

$$a = -\frac{2\lambda}{\sqrt{p'}}, \quad b = -\sqrt{\frac{p}{p'}}; \qquad a' = \frac{2\mu}{\sqrt{p'}}, \quad b' = \sqrt{\frac{p}{p'}};$$

la condition devient donc

$$\cos\varphi = \frac{p' - p - 4\lambda\mu}{\sqrt{(4\lambda^2 + p + p')(4\mu^2 + p + p')}}$$

ou

$$[16\lambda^2\mu^2 + 4(p+p')(\lambda^2+\mu^2) + (p+p')^2]\cos^2\varphi = (4\lambda\mu + p - p')^2.$$

Substituant dans cette équation à λ et μ les valeurs $\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}}$ et $\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}}$, il vient

$$\left[16\left(\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'}\right)^2 + 8(p+p')\left(\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'}\right) + (p+p')^2\right]\cos^2\varphi$$
$$= \left[4\left(\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'}\right) + p - p'\right]^2.$$

Cette dernière équation simplifiée en vertu de la relation $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = x$, qui est satisfaite pour tous les points du lieu, devient

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[16x^2 + 8(p+p')\left(x + \frac{2z^2}{p'}\right) + (p+p')^2\right]\cos^2\varphi \\ &\qquad = (4x + p - p')^2. \end{aligned} \right.$$

Les points cherchés sont donc à l'intersection du paraboloïde et du cylindre hyperbolique représenté par l'équation précédente.

Dans le cas particulier où l'angle donné φ est droit, l'équation (1) se réduit à $(4x + p - p') = 0$; elle représente un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde, et qui coupe, par conséquent, la surface suivant une hyperbole. Si $p = p'$, ce plan devient le plan tangent au sommet; le lieu des points communs à ce plan et au paraboloïde se forme des deux génératrices rectilignes menées par le sommet de la surface.

Dans tous les cas, le plan $4x + p - p' = 0$ est le lieu géométrique des sommets des trièdres trirectangles circonscrits au paraboloïde. Il suffit, pour s'en assurer, d'ajouter, en tenant compte des relations qui expriment

que trois plans sont rectangulaires, les équations des trois plans tangents de la forme

$$4x\cos^2\alpha + 4y\cos\alpha\cos\beta + 4z\cos\alpha\cos\gamma = p'\cos^2\gamma - p\cos^2\beta.$$

On trouve aisément $4x = p' - p$.

SOLUTION DE LA QUESTION 646;

PAR M. MARCELLIN NOBLOT,
Élève du lycée de Lyon.

ÉNONCÉ. — *Par un point* (α, β) *du plan d'une ellipse* $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, *on peut, en général, mener quatre droites qui coupent cette courbe sous un angle donné* δ *différent de* 0; *trouver l'équation du système de ces quatre droites.*

Soient Δ la tangente de l'angle δ; m le coefficient angulaire d'une droite menée par le point (α, β); x, y les coordonnées du point où elle coupe l'ellipse sous l'angle δ: on aura

$$(1) \qquad \Delta = \frac{m + \dfrac{b^2x}{a^2y}}{1 - m\dfrac{b^2x}{a^2y}},$$

$$(2) \qquad Y - \beta = m(X - \alpha),$$

$$(3) \qquad y - \beta = m(x - \alpha),$$

$$(4) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Les équations (1) et (3) donnent

$$x = -\frac{a^2(\Delta - m)(\beta - m\alpha)}{(a^2 - b^2)m\Delta - a^2m^2 - b^2},$$

$$y = -\frac{b^2(m\Delta + 1)(\beta - m\alpha)}{(a^2 - b^2)m\Delta - a^2m^2 - b^2}.$$

En remplaçant x, y par ces expressions dans l'équa-

tion (4), il vient

$$(6 - m\alpha)^2 [a^2(\Delta - m)^2 + b^2(m\Delta + 1)^2]$$
$$= [(a^2 - b^2) m\Delta - a^2 m^2 - b^2]^2,$$

ou, parce que $m = \frac{Y - 6}{X - \alpha}$,

$$(5) \left\{ \begin{aligned} &\left(6 - \alpha \frac{Y-6}{X-\alpha}\right)^2 \left[a^2 \left(\Delta - \frac{Y-6}{X-\alpha}\right)^2 + b^2 \left(\frac{Y-6}{X-\alpha}\Delta + 1\right)^2 \right] \\ &= \left[c^2 \Delta \frac{Y-6}{X-\alpha} - a^2 \left(\frac{Y-6}{X-\alpha}\right)^2 - b^2 \right]^2; \end{aligned} \right.$$

équation du quatrième degré homogène par rapport à $Y - 6$, $X - \alpha$, qui représente le système de quatre droites, réelles ou imaginaires, menées par le point $(\alpha, 6)$, et coupant l'ellipse sous l'angle donné δ.

Quand $\Delta = 0$, l'équation (5) se réduit à

$$(6X - \alpha Y)^2 = a^2(Y - 6)^2 + b^2(X - \alpha)^2,$$

elle représente alors le système des deux tangentes menées du point $(\alpha, 6)$ à l'ellipse.

Note du Rédacteur. — La même question a été résolue d'une manière semblable par M. Gustave Harang, élève en mathématiques spéciales au lycée de Douai (classe de M. Painvin).

SOLUTIONS DES QUESTIONS 638 ET 639;

PAR M. E. HANS,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Question 638.

Soient M un point du lieu; O le centre de l'hyperbo-

loïde, et $OM = a'$. Je prends pour axe des x la droite OM, pour axes des y et des z les axes de l'hyperbole conjuguée; l'équation de la surface sera

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

L'intersection de l'hyperboloïde par le plan $x = a'$ est le système des deux droites $y = \pm \frac{b'}{c'} z$; ces deux droites devant faire un angle constant V, on a

$$(1) \qquad \tang V = \frac{2b'c'}{c'^2 - b'^2}.$$

Prenons maintenant pour axes de coordonnées les trois axes de l'hyperboloïde, et nommons x, y, z les coordonnées du point M, rapporté à ce nouveau système. En désignant par a, b, c les demi-axes de l'hyperboloïde, on aura

$$a'^2 + b'^2 - c'^2 = a^2 + b^2 - c^2, \quad a'^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

d'où

$$(2) \qquad c'^2 - b'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 - c^2).$$

Le parallélipipède construit sur les demi-diamètres conjugués a même volume que celui qui est construit sur les demi-axes; sa base est $b'c'$, et sa hauteur est la distance de l'origine au plan tangent

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} - \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

Cette hauteur a donc pour expression

$$\pm \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Donc

$$abc = \pm \frac{b'c'}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

d'où

(3) $$b'c' = \pm abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Remplaçant, dans l'équation (1), $b'c'$ et $c'^2 - b'^2$ par leurs valeurs (3) et (2), il vient

(4) $$\operatorname{tang} V = \frac{\pm 2abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}{x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 - c^2)}.$$

Le lieu cherché est donc déterminé par l'intersection de l'hyperboloïde et d'une surface du quatrième degré que l'équation (4) représente.

Quand l'angle donné V est droit, l'équation (4) se réduit à

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

et, dans ce cas, le lieu est déterminé par l'intersection de l'hyperboloïde et d'une sphère.

On voit à priori qu'il n'y aura de lieu réel qu'autant que l'angle donné ne surpassera pas le plus grand angle formé par deux des génératrices du cône asymptote.

Question 639.

La solution de ce problème se déduit de celle du problème précédent. En effet, on obtient l'équation

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2q} = x$$

du paraboloïde hyperbolique, en transportant l'origine

au sommet ($x = -a, y = 0, z = 0$), de l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

faisant tendre a vers l'infini, et posant

$$\lim \frac{b^2}{a} = p, \quad \lim \frac{c^2}{a} = q.$$

Dans le cas de l'hyperboloïde, le lieu appartient à la surface

$$(\text{tang V})\left[x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\right] = \pm 2abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Transportant l'origine au sommet, cette équation devient

$$(\text{tang V})\left[(x-a)^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\right] = \pm 2abc\sqrt{\frac{(x-a)^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Élevant au carré et simplifiant

$$(\text{tang}^2 \text{V})(x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - b^2 + c^2)^2 = 4a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} - \frac{2x}{a^3} + \frac{1}{a^2}\right).$$

Divisant les deux membres par a^2,

$$(\text{tang}^2 \text{V})\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} - 2x - \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}\right)^2$$
$$= 4\frac{b^2}{a}\cdot\frac{c^2}{a}\cdot\frac{1}{a^2}x^2 + 4\frac{c^2}{b^2}y^2 + 4\frac{b^2}{c^2}z^2 - 8.\frac{b^2}{a}\cdot\frac{c^2}{a}\frac{1}{a}x + 4.\frac{b^2}{a}\cdot\frac{c^2}{a}.$$

Pour $a = \infty$,

$$\frac{b^2}{a} = p, \quad \frac{c^2}{a} = q, \quad \frac{b^2}{c^2} = \frac{p}{q}, \quad \frac{c^2}{b^2} = \frac{q}{p};$$

l'équation se réduit à

$$(1)\quad (\tang^2 V)(-2x-p+q)^2 = 4\cdot\frac{q}{p}y^2 + 4\cdot\frac{p}{q}z^2 + 4pq,$$

et elle représente un hyperboloïde. Le lieu cherché est donc déterminé par l'intersection de cet hyperboloïde et du paraboloïde donné.

Lorsque l'angle V est droit, l'équation (1) donne

$$(-2x-p+q)=0,$$

équation qui représente un plan parallèle au plan des yz. Dans ce cas, le lieu est une hyperbole. Si on a de plus $p=q$, le lieu se compose de deux droites.

THÉORÈME SUR LES CONIQUES INSCRITES DANS UN QUADRILATÈRE;

PAR M. PAINVIN.

Soient S, S', S'', *trois coniques inscrites dans un quadrilatère; on mène une tangente quelconque à la conique* S; *puis par les points* P' *et* P'', Q' *et* Q'', *où cette tangente rencontre respectivement les coniques* S' *et* S'', *on mène encore des tangentes à la première conique* S; *le lieu des intersections* M *de ces tangentes se compose de deux coniques inscrites dans le même quadrilatère.*

Tel est l'énoncé du théorème que je vais démontrer.

1. Si A, B, C représentent des fonctions linéaires homogènes des coordonnées x, y, z d'un point, l'équation

$$A^2 = \frac{B^2}{\lambda} + \frac{C^2}{\mu},$$

où λ et μ sont deux constantes liées par la relation

$$\lambda + \mu = 1,$$

représente une conique inscrite dans un quadrilatère ayant pour diagonales les droites

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

et pour côtés les droites

$$(1) \quad \begin{cases} A + B + C = 0, \\ A + B - C = 0, \\ A - B + C = 0, \\ A - B - C = 0. \end{cases}$$

Cherchons, en effet, l'enveloppe de la courbe; en regardant λ comme un paramètre variable, on trouve

$$(A^2 + B^2 - C^2)^2 - 4A^2B^2 = 0,$$

ou

$$(A + B + C)(A + B - C)(A - B + C)(A - B - C) = 0.$$

2. Ceci posé, soient

$$(1) \quad \begin{cases} (S) \quad A^2 = \dfrac{B^2}{\lambda} + \dfrac{C^2}{\mu}, \quad \text{où} \quad \lambda + \mu = 1, \\ (S') \quad A^2 = \dfrac{B^2}{h} + \dfrac{C^2}{k}, \quad \text{où} \quad h + k = 1, \\ (S'') \quad A^2 = \dfrac{B^2}{h_1} + \dfrac{C^2}{k_1}, \quad \text{où} \quad h_1 + k_1 = 1 \end{cases}$$

les équations des trois coniques S, S′, S″.

La droite

$$(2) \quad A = B\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\lambda}} + C\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\mu}},$$

où φ est un paramètre arbitraire, représente une tangente quelconque à la conique S; car si l'on remplace A par cette valeur dans la première des équations (1), on trouve un carré parfait.

Un point quelconque P′ de S′, et un point quelconque

P″ de S″ seront respectivement donnés par les équations

$$(3)\qquad P'\begin{cases}\dfrac{B}{A}=\sqrt{h}\sin\alpha,\\[2mm] \dfrac{C}{A}=\sqrt{k}\cos\alpha,\end{cases}\qquad P''\begin{cases}\dfrac{B}{A}=\sqrt{h_1}\sin\alpha_1,\\[2mm] \dfrac{C}{A}=\sqrt{k_1}\cos\alpha_1:\end{cases}$$

α, α_1, sont deux constantes arbitraires; les équations des deux coniques sont évidemment vérifiées par les coordonnées des points P′ et P″.

Exprimons maintenant que ces deux points sont sur la tangente (2) à la conique S, ce qui conduit aux conditions

$$(4)\qquad 1=\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\lambda}}\sin\alpha\sin\varphi+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\mu}}\cos\alpha\cos\varphi,$$

$$(5)\qquad 1=\frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{\lambda}}\sin\alpha_1\sin\varphi+\frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{\mu}}\cos\alpha_1\cos\varphi.$$

Or, les équations de deux autres tangentes quelconques à la conique S seront

$$(6)\qquad A=\frac{B}{\sqrt{\lambda}}\sin u+\frac{C}{\sqrt{\mu}}\cos u,$$

$$(7)\qquad A=\frac{B}{\sqrt{\lambda}}\sin u_1+\frac{C}{\sqrt{\mu}}\cos u_1.$$

Exprimons que la première passe par le point P′, et la seconde par le point P″, nous aurons les deux nouvelles conditions

$$(8)\qquad 1=\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\lambda}}\sin u\sin\alpha+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\mu}}\cos u\cos\alpha,$$

$$(9)\qquad 1=\frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{\lambda}}\sin u_1\sin\alpha_1+\frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{\mu}}\cos u_1\cos\alpha_1.$$

L'équation du lieu des points d'intersection des tangentes (6) et (7) s'obtiendra en éliminant les indéter-

minées α, α_1, u, u_1, et φ entre les six équations (4), (5), (6), (7), (8), (9).

3. Pour effectuer cette élimination, tirons de (4) et (8) les valeurs de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, et ajoutons la somme des carrés; opérons de même sur α_1, à l'aide des relations (5) et (9); on obtient ainsi les deux égalités suivantes qui ne renferment plus que φ, u et u_1 :

$$(10)\quad \cos^2\left(\frac{\varphi-u}{2}\right)=\frac{\lambda}{h}\sin^2\left(\frac{\varphi+u}{2}\right)+\frac{\mu}{k}\cos^2\left(\frac{\varphi+u}{2}\right),$$

$$(11)\quad \cos^2\left(\frac{\varphi-u_1}{2}\right)=\frac{\lambda}{h_1}\sin^2\left(\frac{\varphi+u_1}{2}\right)+\frac{\mu}{k_1}\cos^2\left(\frac{\varphi+u_1}{2}\right);$$

on a supprimé les facteurs $\left(\frac{\varphi-u}{2}\right)$, $\left(\frac{\varphi-u_1}{2}\right)$, qui, égalés à zéro, donneraient la tangente primitive (2); les lieux géométriques correspondants sont évidemment les coniques S′ et S″.

Maintenant éliminons φ entre les équations (10) et (11); pour cela, ayant égard aux formules

$$\cos^2\frac{a}{2}=\frac{1+\cos a}{2},\quad \sin^2\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{2},$$

j'écrirai d'abord les relations (10) et (11) sous la forme suivante :

$$\begin{cases}\cos(\varphi-u)=\left[-\frac{\lambda}{h}+\frac{\mu}{k}\right]\cos(\varphi+u)+\frac{\lambda}{h}+\frac{\mu}{k}-1,\\ \cos(\varphi-u_1)=\left[-\frac{\lambda}{h_1}+\frac{\mu}{k_1}\right]\cos(\varphi+u_1)+\frac{\lambda}{h_1}+\frac{\mu}{k_1}-1.\end{cases}$$

Développons les cosinus et ordonnons par rapport à $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, nous trouvons

$$(12)\quad \begin{cases}a\sin\varphi\sin u+b\cos\varphi\cos u=c,\\ a_1\sin\varphi\sin u_1+b_1\cos\varphi\cos u_1=c_1,\end{cases}$$

après avoir posé

$$(13)\begin{cases} a=-\frac{\lambda}{h}+\frac{\mu}{k}+1, & a_1=-\frac{\lambda}{h_1}+\frac{\mu}{k_1}+1,\\ b=\ \ \frac{\lambda}{h}-\frac{\mu}{k}+1, & b_1=\ \ \frac{\lambda}{h_1}-\frac{\mu}{k_1}+1,\\ c=\ \ \frac{\lambda}{h}+\frac{\mu}{k}-1, & c_1=\ \ \frac{\lambda}{h_1}+\frac{\mu}{k_1}-1. \end{cases}$$

Résolvons les équations (12) par rapport à $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, puis ajoutons la somme des carrés; on obtient la relation suivante entre u et u_1 :

$$(14)\begin{cases} (ab_1\sin u\cos u_1-a_1b\sin u_1\cos u)^2\\ =(a_1c\sin u_1-ac_1\sin u)^2+(bc_1\cos u-b_1c\cos u_1)^2. \end{cases}$$

Or, si l'on remarque que les produits ab_1, a_1b; ac_1, a_1c, ..., sont de la forme

$$(15)\begin{cases} ab_1=p+p_1, & ca_1=n+n_1, & bc_1=m+m_1,\\ a_1b=p-p_1, & c_1a=n-n_1, & b_1c=m-m_1; \end{cases}$$

la relation (14) deviendra

$$\begin{aligned} &[p\sin(u-u_1)+p_1\sin(u+u_1)]^2\\ &=[n(\sin u_1-\sin u)+n_1(\sin u+\sin u_1)]^2\\ &+[m(\cos u-\cos u_1)+m_1(\cos u+\cos u_1)]^2; \end{aligned}$$

ou enfin

$$(16)\begin{cases} \left[p\sin\frac{u-u_1}{2}\cos\frac{u-u_1}{2}+p_1\sin\frac{u+u_1}{2}\cos\frac{u+u_1}{2}\right]^2\\ =\left[n\sin\frac{u-u_1}{2}\cos\frac{u+u_1}{2}-n_1\sin\frac{u+u_1}{2}\cos\frac{u-u_1}{2}\right]^2\\ +\left[m\sin\frac{u-u_1}{2}\sin\frac{u+u_1}{2}-m_1\cos\frac{u-u_1}{2}\cos\frac{u+u_1}{2}\right]^2. \end{cases}$$

La question se trouve donc ramenée à l'élimination de u et u_1 entre les équations (6), (7) et (16).

En éliminant successivement les quantités C et B, les équations (6) et (7) se ramèneront à la forme

$$(17)\quad \begin{cases} A\sin\left(\dfrac{u+u_1}{2}\right)=\dfrac{B}{\sqrt{\lambda}}\cos\left(\dfrac{u-u_1}{2}\right),\\[2ex] A\cos\left(\dfrac{u+u_1}{2}\right)=\dfrac{C}{\sqrt{\mu}}\cos\left(\dfrac{u-u_1}{2}\right).\end{cases}$$

De là on déduit, sans difficulté,

$$(18)\quad \begin{cases} \sin\left(\dfrac{u+u_1}{2}\right)=\dfrac{B}{H\sqrt{\lambda}}; \quad \sin\left(\dfrac{u-u_1}{2}\right)=\dfrac{R}{H},\\[2ex] \cos\left(\dfrac{u+u_1}{2}\right)=\dfrac{C}{H\sqrt{\mu}}; \quad \cos\left(\dfrac{u-u_1}{2}\right)=\dfrac{A}{H},\end{cases}$$

R et H étant des quantités qui ne renferment aucune indéterminée, et définies par les égalités

$$(19)\quad \begin{cases} H^2=\dfrac{B^2}{\lambda}+\dfrac{C^2}{\mu},\\[2ex] R^2=\dfrac{B^2}{\lambda}+\dfrac{C^2}{\mu}-A^2;\end{cases}$$

H et R entrent d'ailleurs dans les expressions (18) avec des signes quelconques complétement indépendants.

La substitution des valeurs (18) dans la relation (16) nous conduit à l'équation du lieu cherché, savoir :

$$(20)\quad \left[pAR+p_1\frac{BC}{\sqrt{\lambda\mu}}\right]^2=\left[n\frac{RC}{\sqrt{\mu}}-n_1\frac{AB}{\sqrt{\lambda}}\right]^2+\left[m\frac{RB}{\sqrt{\lambda}}-m_1\frac{AC}{\sqrt{\mu}}\right]^2.$$

4. Développons cette dernière équation, en remplaçant R^2 par sa valeur (19), nous trouvons :

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} p^2A^4+m^2\dfrac{B^4}{\lambda^2}+n^2\dfrac{C^4}{\mu^2}+\dfrac{B^2C^2}{\lambda\mu}(m^2+n^2-p_1^2)\\[2ex] \quad -\dfrac{A^2C^2}{\mu}(p^2+n^2-m_1^2)-\dfrac{A^2B^2}{\lambda}(p^2-n_1^2+m^2)\\[2ex] \quad +2\dfrac{RABC}{\sqrt{\lambda\mu}}(mm_1+nn_1+pp_1)\end{array}\right\}=0.$$

Or, je vais démontrer d'abord que le coefficient $(mm_1 + nn_1 + pp_1)$ de R est nul; et je ferai voir ensuite que le premier membre de l'équation restante se décompose en deux facteurs de la forme

$$A^2 - \frac{B^2}{\varphi} - \frac{C^2}{\psi}.$$

5. Pour arriver simplement à ce résultat, je remarque que les six constantes m, n, p; m_1, n_1, p_1, dépendent, par l'intermédiaire des a, a_1, b, b_1, c, c_1, de trois constantes arbitraires seulement, savoir λ, h et h_1; il est donc important de faire ressortir le plus possible cette dépendance.

Des égalités (15) je conclus

$$(22)\begin{cases} 2m = bc_1 + b_1c, & 2n = ca_1 + c_1a, & 2p = ab_1 + a_1b, \\ 2m_1 = bc_1 - b_1c, & 2n_1 = ca_1 - c_1a, & 2p_1 = ab_1 - a_1b. \end{cases}$$

Or, les relations (13) donnent

$$(23)\begin{cases} a + b = 2, & a_1 + b_1 = 2, \\ b + c = 2\frac{\lambda}{h}, & b_1 + c_1 = 2\frac{\lambda}{h_1}, \\ a + c = 2\frac{\mu}{k} = \frac{2(1-\lambda)}{1-h}, & a_1 + c_1 = 2\frac{\mu}{k_1} = 2\frac{1-\lambda}{1-h_1}. \end{cases}$$

Du premier groupe (23) on déduit

$$(24)\qquad \begin{cases} a = 2 - b, \\ \lambda = \dfrac{c^2 - b^2}{4(1-b)}; \end{cases}$$

et du second,

$$(25)\qquad \begin{cases} a_1 = 2 - b_1, \\ \lambda = \dfrac{c_1^2 - b_1^2}{4(1-b_1)}. \end{cases}$$

Posons alors

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} b &= 1 - \beta, \\ b_1 &= 1 - \beta_1, \end{aligned} \right.$$

les égalités (24) et (25) nous donneront d'abord

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= 1 + \beta, \\ a_1 &= 1 + \beta_1, \end{aligned} \right.$$

puis, en égalant les valeurs de λ :

$$(28) \qquad \beta c_1^2 - \beta_1 c^2 = (\beta - \beta_1)(1 - \beta\beta_1).$$

D'après cette notation, les valeurs des constantes m, n, p, m_1, n_1, p_1, fournies par les équations (22), seront

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} 2m &= c_1 + c - (\beta c_1 + \beta_1 c), \\ 2m_1 &= c_1 - c - (\beta c_1 - \beta_1 c), \\ 2n &= c + c_1 + (\beta c_1 + \beta_1 c), \\ 2n_1 &= -(c_1 - c) - (\beta c_1 - \beta_1 c), \\ p &= 1 - \beta\beta_1, \\ p_1 &= \beta - \beta_1; \end{aligned} \right.$$

et, en outre, la relation (28) pourra s'écrire

$$(30) \qquad \beta c_1^2 - \beta_1 c^2 = p p_1.$$

6. Ces préparations étant effectuées, calculons d'abord la quantité $(mm_1 + nn_1 + pp_1)$. On a :

$$\begin{aligned} 4(mm_1 + nn_1 + pp_1) = {} & c_1^2 - c^2 + \beta^2 c_1^2 - \beta_1^2 c^2 \\ & - 2(\beta c_1^2 - \beta_1 c^2) - c_1^2 + c^2 - \beta^2 c_1^2 + \beta_1^2 c^2 \\ & - 2(\beta c_1^2 - \beta_1 c^2) + 4 p p_1; \end{aligned}$$

le second membre est évidemment nul; donc

$$(29\ bis) \qquad mm_1 + nn_1 + pp_1 = 0.$$

Si maintenant on pose

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{ll} A^2 = X, & M = p^2 + m^2 - n_1^2, \\ \frac{B^2}{\lambda} = Y, & N = p^2 - m_1^2 + n^2, \\ \frac{C^2}{\mu} = Z, & P = p_1^2 - m^2 - n^2; \end{array}\right.$$

l'équation (21) prendra la forme

$$(32)\quad p^2X^2 + m^2Y^2 + n^2Z^2 - MXY - NXZ - PYZ = 0.$$

La décomposition en carrés nous donnera, en premier lieu,

$$(33)\quad (2p^2X - MY - NZ)^2 - M_1^2Y^2 - N_1^2Z^2 - 2P_1YZ = 0,$$

après avoir posé

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} M_1^2 = M^2 - 4p^2m^2, \\ N_1^2 = N^2 - 4p^2n^2, \\ P_1 = MN + 2p^2P. \end{array}\right.$$

Continuant la décomposition, nous trouvons enfin

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l} (2p^2X - MY - NZ)^2 \\ -\left(M_1Y + \frac{P_1}{M_1}Z\right)^2 + \frac{P_1^2 - M_1^2N_1^2}{M_1^2}Z^2 = 0. \end{array}\right.$$

Or, il arrive ici que

$$(36)\quad P_1^2 = M_1^2N_1^2.$$

On a, en effet, d'après les formules (34),

$$(37)\quad P_1^2 - M_1^2N_1^2 = (MN + 2p^2P)^2 - (M^2 - 4p^2m^2)(N^2 - 4p^2n^2);$$

en ayant égard aux valeurs des M, N, P (31), on aura

successivement :

$$\frac{P_1^2 - M_1^2 N_1^2}{4p^2} = PMN + p^2P^2 + m^2N^2 + n^2M^2 - 4p^2m^2n^2$$
$$= p_1^2 MN + m^2N^2 + n^2M^2 - (m^2 + n^2) MN$$
$$+ p^2 (P^2 - 4m^2n^2)$$
$$= p_1^2 MN + (M - N)(n^2M - m^2N)$$
$$+ p^2(P^2 - 4m^2n^2);$$

et enfin

$$(38)\quad \frac{P_1^2 - M_1^2N_1^2}{4p^2} = \left\{\begin{array}{l} p^2p_1^2(p^2+p_1^2) - p^2p_1^2(m^2+m_1^2+n^2+n_1^2) \\ -p^2(m^2m_1^2 + n^2n_1^2 - m^2n_1^2 - m_1^2n^2) \\ -p_1^2(m^2m_1^2 + n^2n_1^2 - m^2n^2 - m_1^2n_1^2) \\ +(mm_1 + nn_1)^2(m^2 + m_1^2 + n^2 + n_1^2) \\ -2(mm_1 + nn_1)(mn + m_1n_1)(mn_1 + m_1n) \end{array}\right\}.$$

Or, les relations (29) et (30) nous donnent

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{l} mm_1 + nn_1 = -pp_1, \\ mn + m_1n_1 = pcc_1, \\ mn_1 + m_1n = -p_1cc_1; \end{array}\right.$$

de là on conclut

$$(40)\quad \left\{\begin{array}{l} m^2m_1^2 + n^2n_1^2 = p^2p_1^2 - 2mm_1nn_1, \\ m^2n^2 + m_1^2n_1^2 = p^2c^2c_1^2 - 2mm_1nn_1, \\ m^2n_1^2 + m_1^2n^2 = p_1^2c^2c_1^2 - 2mm_1nn_1, \\ (mm_1 + nn_1)(mn_1 + m_1n)(mn + m_1n_1) = p^2p_1^2c^2c_1^2. \end{array}\right.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression (38), on constate immédiatement l'égalité annoncée, savoir

$$P_1^2 = M_1^2N_1^2.$$

Si l'on a égard à cette dernière relation, l'équation (35) donne les deux suivantes, en remettant pour X, Y, Z

leurs valeurs (31),

$$A^2 = \frac{M - M_1}{2p^2} \cdot \frac{B^2}{\lambda} + \frac{N - N_1}{2p^2} \cdot \frac{C^2}{\mu},$$

$$A^2 = \frac{M + M_1}{2p^2} \cdot \frac{B^2}{\lambda} + \frac{N + N_1}{2p^2} \cdot \frac{C^2}{\mu};$$

équations qu'on peut écrire sous cette forme plus simple, en faisant usage des relations (34) :

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} A^2 &= \frac{2m^2}{\lambda(M + M_1)} \cdot B^2 + \frac{2n^2}{\mu(N + N_1)} \cdot C^2, \\ A^2 &= \frac{2m^2}{\lambda(M - M_1)} \cdot B^2 + \frac{2n^2}{\mu(N - N_1)} \cdot C^2. \end{aligned} \right.$$

Ainsi se trouve démontrée la première partie du théorème énoncé : *le lieu géométrique se compose de deux coniques.*

Remarque. — Dans tous ces calculs, j'ai supposé $P_1 = + M_1 N_1$; il suffit d'un peu d'attention pour voir que cette restriction n'influe aucunement sur les conséquences que je veux en tirer ; les valeurs particulières de m, n, p, ..., pourront seules indiquer si l'on doit prendre $P_1 = + M_1 N_1$ ou $P_1 = - M_1 N_1$.

7. J'ajouterai que les deux coniques (41) sont inscrites dans le quadrilatère auquel sont inscrites les coniques S, S', S''.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait pour la première conique

$$\frac{\lambda(M + M_1)}{2m^2} + \frac{\mu(N + N_1)}{2n^2} = 1,$$

et pour la seconde

$$\frac{\lambda(M - M_1)}{2m^2} + \frac{\mu(N - N_1)}{2n^2} = 1.$$

Or, ces deux conditions entraînent l'existence simultanée des deux relations

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda n^2 M + \mu m^2 N - 2 m^2 n^2 &= 0,\\ \lambda n^2 M_1 + \mu m^2 N_1 &= 0;\end{aligned}\right.$$

nous allons vérifier ces deux égalités.

Je remarque d'abord que les équations (29) donnent

$$4 m m_1 = - c^2 + c_1^2 + \beta^2 c_1^2 - \beta_1^2 c^2 - 2 p p_1;$$

ou, en remplaçant c_1^2 par la valeur déduite de l'équation (30),

$$4 m m_1 \beta = - p p_1 [c^2 - (1 - \beta)^2].$$

Mais, d'après les équations (24) et (26), on a

$$\lambda = \frac{c^2 - (1-\beta)^2}{4\beta};$$

nous arrivons ainsi à la première des relations suivantes :

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda p p_1 + m m_1 &= 0,\\ \mu p p_1 + n n_1 &= 0;\end{aligned}\right.$$

la seconde se déduit de la première en ayant égard aux égalités (39) et à la condition $\lambda + \mu = 1$. Multiplions ces dernières relations respectivement par $\mu m m_1$, $\lambda n n_1$, et ajoutons, il vient

$$\lambda n^2 n_1^2 + \mu m^2 m_1^2 + \lambda \mu p p_1 (m m_1 + n n_1) = 0,$$

ou, d'après l'équation (29 *bis*),

$$(44)\qquad \lambda n^2 n_1^2 + \mu m^2 m_1^2 = \lambda \mu p^2 p_1^2.$$

8. Ceci posé, la première des égalités (42) qu'il s'agit de vérifier devient, en remplaçant M, N, P par leurs valeurs (31),

$$p^2 (\lambda n^2 + \mu m^2) - m^2 n^2 - (\lambda n^2 n_1^2 + \mu m^2 m_1^2) = 0;$$

ou, en vertu de la relation (44),

$$(45)\qquad p^2(\lambda n^2 + \mu m^2) - m^2 n^2 - \lambda\mu p^2 p_1^2 = 0.$$

Substituons à λ et μ leurs valeurs (43), nous trouvons, réduction faite,

$$p(m_1 n + m n_1) + p_1(mn + m_1 n_1) = 0;$$

or, le premier membre est nul par suite des relations (39).

Passons à la seconde des égalités (42). Élevons au carré le premier membre et ayons égard aux relations (34) et (36), puis à la première des égalités (42) qui vient d'être vérifiée; on obtient

$$(\lambda n^2 M + \mu m^2 N)^2 - 4p^2 m^2 n^2[\lambda n^2 + \mu m^2 + \lambda\mu(m^2 + n^2) - \lambda\mu p_1^2],$$

ou

$$4m^2 n^2[m^2 n^2 - (\lambda n^2 + \mu m^2) p^2 + \lambda\mu p^2 p_1^2],$$

quantité évidemment nulle d'après l'égalité démontrée (45).

Ainsi se trouve complétement établi le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Soient* S, S', S'' *trois coniques inscrites dans un quadrilatère; on mène une tangente quelconque à la conique* S*; puis, par les points* P' *et* P'', Q' *et* Q''*, où cette tangente rencontre respectivement les coniques* S' *et* S''*, on mène encore des tangentes à la première conique* S*; le lieu des intersections de ces tangentes se compose de deux coniques inscrites dans le même quadrilatère.*

Je vais maintenant déduire de cette analyse plusieurs conséquences.

9. Si l'on suppose que la conique S'' coïncide avec la conique S', auquel cas on a

$$h = h_1,\quad k = k_1,$$

et, par suite,

$$m_1 = 0,\quad M = p^2 + m^2,\qquad M_1 = p^2 - m^2,$$
$$n_1 = 0,\quad N = p^2 + n^2,\qquad N_1 = p^2 - n^2,$$
$$p_1 = 0,\quad P = -(m^2 + n^2),\quad P_1 = (p^2 - m^2)(p^2 - n^2);$$

les deux coniques (41) se réduisent, l'une à la conique S, et l'autre à

$$A^2 = \frac{m^2}{\lambda p^2} B^2 + \frac{n^2}{\mu p^2} C^2;$$

d'où ce théorème, cas particulier du précédent :

THÉORÈME II. — *Si* S *et* S' *sont deux coniques inscrites dans un quadrilatère, et qu'on mène une tangente quelconque à* S; *puis, que par les points d'intersection de cette tangente avec la conique* S' *on mène des tangentes à la première conique* S: *le lieu des intersections de ces tangentes sera une conique inscrite dans le même quadrilatère.*

10. Considérons un système de coniques homofocales

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - c^2)} = 1;$$

si l'on pose

$$\frac{c}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},\quad \frac{c}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\mu}},$$

cette équation prend la forme

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{(-y^2)}{\mu} = c^2;$$

c'est-à-dire que des coniques homofocales sont toutes inscrites dans un même quadrilatère; les sommets de ce quadrilatère sont, comme il est facile de s'en convaincre, les deux foyers réels et les deux foyers imaginaires de la conique; deux des diagonales de ce quadrilatère sont les

axes communs à toutes ces courbes, la troisième diagonale ($c = 0$) est à l'infini. Le théorème que je viens de démontrer est donc applicable à ce cas particulier, et nous pourrons dire :

Théorème III. — *Trois coniques* S, S', S'' *étant homofocales, si l'on mène une tangente quelconque à la conique* S, *et que, par les points d'intersection de cette tangente avec les coniques* S' *et* S'', *on mène de nouvelles tangentes à la première, le lieu des intersections de ces tangentes se composera de deux coniques homofocales avec les premières.*

On aurait un théorème semblable pour le cas encore plus particulier de trois cercles concentriques.

11. Dans les calculs précédents, les lettres A, B, C représentent, comme nous l'avons dit, des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z; $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ étant les coordonnées d'un point. Supposons actuellement que $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, au lieu de désigner les coordonnées d'un point, soient les paramètres ou les coordonnées d'une droite. En d'autres termes, au lieu d'interpréter les calculs que nous venons de faire dans le système des coordonnées-point, interprétons-les dans le système des coordonnées tangentielles.

Dans ce dernier système :

Les équations (1) représenteront trois coniques circonscrites à un même quadrilatère dont les sommets seront les points représentés par les équations (I); l'équation (2) représente un point quelconque I situé sur la conique S; les équations (3) donnent les coordonnées des tangentes respectives T' et T'' aux coniques S' et S''; les relations (4) et (5) sont les conditions pour que les tangentes T' et T'' passent par le point I; les équations (6) et (7) repré-

sentent deux points quelconques M' et M'' situés sur la conique S; les relations (8) et (9) expriment : la première, que le point M' est sur la tangente IT'; la seconde, que le point M'' est sur la tangente IT''. Les équations (6) et (7) donnent donc les coordonnées d'une droite passant par les points d'intersection avec la conique S des tangentes menées respectivement à S' et S'' d'un point quelconque I de S. Par conséquent l'équation (21), qui est une relation entre les coordonnées d'une quelconque de ces droites, en sera la courbe enveloppe, et cette courbe enveloppe (21) ou (41) se composera de deux coniques circonscrites au même quadrilatère.

Nous sommes ainsi conduits au théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Trois coniques* S, S', S'' *étant circonscrites à un même quadrilatère, si d'un point quelconque* I *de* S *on mène des tangentes* IT' *et* IT'' *respectivement aux coniques* S' *et* S'', *et que* M' *et* M'' *soient les intersections de ces tangentes avec la conique* S, *l'enveloppe des droites* $M'M''$ *se compose de deux coniques circonscrites au même quadrilatère.*

Ce dernier théorème est connu depuis longtemps. M. Poncelet l'a démontré analytiquement pour le cas de trois cercles ayant une corde commune (*Applications d'Analyse et de Géométrie*, p. 314 à 347), et l'a étendu au cas de trois coniques à l'aide des principes de la méthode projective.

12. Du premier des théorèmes que je viens de démontrer, on peut déduire plusieurs conséquences relatives à l'inscription des polygones. Je ne citerai que celle-ci :

THÉORÈME V. — *Soient* $S, S_1, S_2, \ldots, S_n$, $(n+1)$ *coniques inscrites dans un même quadrilatère; imaginons un polygone* $A A_1 A_2 \ldots A_n A$ *dont les* n *premiers sommets* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont assujettis à rester respective-*

ment sur les n coniques S_1, S_2, ..., S_n *et dont tous les côtés sont constamment tangents à la conique* S; *si l'on déforme ce polygone en conservant toujours les mêmes conditions et le même mode de construction, le sommet libre* A *de ce polygone décrira une conique inscrite dans le même quadrilatère.*

La déduction de cette propriété est facile. Considérons, par exemple, cinq coniques S, S_1, S_2, S_3, S_4; $A_4 A_3$ étant une tangente quelconque à S, le point de rencontre i des deux tangentes $A_4 i$ et $A_3 i$ décrira une conique inscrite dans le même quadrilatère, d'après le premier théorème. $A_3 A_2$ étant une tangente à S, et le point i se trouvant sur une conique également inscrite, le point de rencontre h des deux tangentes ih et $A_2 h$ décrira aussi une conique inscrite dans le même quadrilatère. Enfin, $A_2 A_1$ étant une tangente à S, le point h se trouvant sur une conique inscrite, le point de rencontre A des deux tangentes hA et A_1A décrira une conique inscrite. C'est ce qu'il fallait démontrer.

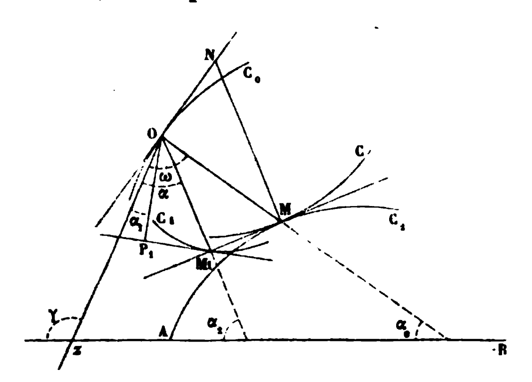
NOTE SUR LES ROULETTES;

PAR M. J. SACCHI,
Professeur au lycée de Porte-Neuve (Milan).

1. Soient : CM une courbe qui roule sans glisser sur la convexité d'une autre courbe C_2M, en transportant dans son mouvement le point O et l'axe Oz invariablement liés à la courbe C;

C_0O la roulette engendrée par le point O; et $C_1 M_1$ la podaire de la courbe C, (lieu géométrique des projections orthogonales du point O sur les diverses tangentes à la courbe C);

OM_1, MN des perpendiculaires à la tangente commune aux courbes C, C_2 au point M ;



ON une tangente à la roulette C_0 ; et OP_1 une perpendiculaire à la tangente P_1M_1 à la courbe podaire C_1 ;

BAz un axe fixe.

Que l'on nomme :

$$OM = r,\ OM_1 = p,\ OP_1 = p_1,\ MN = N;$$

s, s_0, s_1, s_2 les arcs correspondants des courbes C, C_0, C_1, C_2, ayant respectivement leurs extrémités variables aux points M, O, M_1, M ;

R, R_0, R_1, R_2 les rayons de courbure de C, C_0, C_1, C_2 aux points M, O, M_1, M ;

ρ, ρ_0, ρ_1 les rayons de courbure des développées de C, C_0, C_1 aux points correspondants à M, O, M_1 ;

ω, α, α_1 les angles que les droites r, p, p_1 forment avec Oz ;

γ, α_0, α_2 les angles que les droites Oz, r, p forment avec l'axe BAz.

On suppose que tous ces angles soient évalués de manière qu'ils croissent avec les arcs des courbes auxquelles ils se rapportent.

2. Dans un mouvement *très-petit*, pendant lequel un élément de la courbe C vient en contact avec un élément égal de la courbe C_2, *base* de la roulette, le point O décrira autour du point M un petit arc circulaire OO_1, ayant le rayon r; l'angle MOz prendra une nouvelle position MO_1z_1, et l'angle OMO_1 sera égal à l'angle des côtés Oz, O_1z_1, c'est-à-dire égal à $(\gamma+\mu)-\gamma$, en désignant par μ l'accroissement très-petit de γ. Donc, la droite r sera normale à la roulette en O; de plus, on aura $\frac{OO_1}{\mu}=r$, et, en passant à la limite, $\frac{ds_0}{d\gamma}=r$. En désignant au moyen d'un accent les dérivées par rapport à une variable quelconque, on a :

$$(1)\qquad s'_0=r\gamma',$$

relation très-simple, et fondamentale dans la théorie des roulettes.

3. En prenant les dérivées des équations évidentes :

$$\alpha_0=\gamma-\omega,\quad \alpha_2=\gamma-\alpha;$$

substituant, dans ces dérivées, à γ' sa valeur donnée par l'équation (1); et observant, de plus, que par la nature du mouvement $s_2=s$, et qu'en général

$$(2)\qquad \alpha'_n=\pm\frac{s'_n}{R_n},\quad \omega'=\pm\frac{s'}{N},$$

formules dans lesquelles on prend le signe supérieur si l'arc croît avec l'angle, et le signe inférieur dans le cas contraire, on aura :

$$(3)\qquad \frac{s'_0}{s'}=\frac{1}{N\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_0}\right)},\quad \frac{s'_0}{s'}=r\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}\right),$$

d'où

$$(4)\qquad \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{N}=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_0}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}\right).$$

De cette dernière équation on tire

$$R_0 = \frac{rN}{N - L}, \quad \text{en posant} \quad \frac{RR_2}{R + R_2} = L.$$

Au moyen de ces relations on peut facilement construire L, et par suite R_0.

Si, dans la première des équations (3), on remplace $\frac{1}{N}$ par sa valeur $\frac{\omega'}{s'}$, on obtient :

$$\frac{d\omega}{ds_0} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R_0},$$

relation due à M. Catalan (*Nouv. Ann.*, t. XV, p. 102).

4. On sait que pour la courbe podaire on a les équations

(5) $$s'_1 = r\alpha' = r\frac{s'}{R},$$

et que les deux angles que les droites r et p_1 forment avec p sont égaux ; par conséquent :

$$\omega - \alpha = \alpha - \alpha_1, \quad \text{ou bien} \quad \alpha_2 - \alpha_0 = \alpha - \alpha_1.$$

En prenant la dérivée de cette dernière équation, et de l'équation $\alpha_2 = \gamma - \alpha$, eu égard aux relations (1), (2), (5) et à $s_2 = s$, on obtient

$$s'_0 = s'_1 \left(\frac{R}{rR_2} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right) R_0,$$

et

(6) $$s'_0 = s'_1 \left(1 + \frac{R}{R_2}\right).$$

De ces relations on déduit :

(7) $$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} - \frac{1}{r} = \frac{R}{R_2}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r}\right),$$

égalité remarquable, qui, avec l'équation (4), fournit la relation suivante, entre les rayons de courbure des quatre courbes C, C_0 C_1, C_2, et la normale N de la première :

$$(8) \qquad N(2R_1 - R_0) = R\left(R_1 - R_0\frac{R_2}{R + R_2}\right).$$

5. En supposant que la base C_2 soit une droite, on aura $\frac{1}{R_2} = 0$, et les équations (6), (7), (4), (8) donnent

$$(9) \qquad s'_0 = s'_1, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0},$$

$$(10) \qquad R_0 = \frac{rN}{N - R}, \quad R_1 = R_0\frac{N - R}{2N - R}.$$

La première de ces relations est due à M. Steiner (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 342), et la seconde donne le théorème suivant :

Le rayon vecteur réciproque d'une courbe plane est égal à la différence des rayons réciproques de courbure de la podaire et de la roulette de la même courbe, la podaire étant déterminée par rapport au point origine *des rayons vecteurs, et la roulette étant à base rectiligne et engendrée par le même point.*

Substituant dans la première des équations (10) les valeurs connues

$$(11) \qquad N = \frac{r^2}{p}, \quad R = \frac{rr'}{p'},$$

on a

$$p' = \left(\frac{p}{r}\right)' R_0,$$

équation qui donne

$$(12) \qquad \frac{dp}{d\alpha_0} = R_0 \cos\alpha_0, \quad \text{en ayant} \quad p = r.\sin\alpha_0.$$

Posant $\sqrt{r^2 - p^2} = q$, et désignant par un accent la dérivée relative à α, on sait que

$$(13) \qquad p' = q, \quad rr' = q\mathrm{R}.$$

Et, des équations (2), (9), (5), on tire les suivantes :

$$\alpha'_0 = \frac{r}{\mathrm{R}_0}, \quad \alpha'_1 = \frac{r}{\mathrm{R}_1},$$

lesquelles, au moyen de la formule connue $\mathrm{R}'_n = \rho_n . \alpha'_n$, donnent

$$(14) \qquad \mathrm{R}'_0 = \rho_0 \frac{r}{\mathrm{R}_0}, \quad \mathrm{R}'_1 = \rho_1 \frac{r}{\mathrm{R}_1}, \quad \mathrm{R}' = \rho.$$

Maintenant, des équations (10), (11), on déduit

$$\mathrm{R}_0 (r^2 - p\mathrm{R}) = r^3, \quad \mathrm{R}_1 (2r^2 - p\mathrm{R}) = r^3;$$

et, en prenant les dérivées par rapport à α, et en ayant égard aux relations (13), (14), on obtient

$$r^4 \rho_0 - p\rho \mathrm{R}_0^3 - q\mathrm{R}\mathrm{R}_0^2 (3r - \mathrm{R}_0) = 0,$$
$$r^4 \rho_1 - p\rho \mathrm{R}_1^3 - 3q\mathrm{R}\mathrm{R}_1^2 (r - \mathrm{R}_1) = 0.$$

Éliminant p, q, r des quatre dernières équations et de l'équation $q^2 = r^2 - p^2$, on a les deux relations suivantes entre les rayons de courbure des trois courbes C, C_0, C_1, et de leurs développées :

$$(15) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\rho_0}{\mathrm{R}_0^3} \cdot \frac{3}{\mathrm{R}_0} + \frac{\rho_1}{\mathrm{R}_1^3}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{4}{\mathrm{R}_0}\right) - \frac{\rho}{\mathrm{R}}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{2}{\mathrm{R}_0}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_0}\right)^2 = 0, \\ & \left(\frac{\rho_0}{\mathrm{R}_0^3} - \frac{\rho_1}{\mathrm{R}_1^4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{2}{\mathrm{R}_0}\right)^2\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_0}\right)^2 - \mathrm{R}^2\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_0}\right)^6 = 0. \end{aligned} \right.$$

Soit $a^m p = r^{m+1}$ l'équation de la courbe mobile; cette équation représente une des lignes suivantes : *circonférence, droite, lemniscate de Bernoulli, hyperbole équilatère, cardioïde, parabole, caustique par réflexion* de la

parabole, *les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe*, etc.; selon que l'on donne à m les valeurs :

$$1,\quad -1,\quad 2,\quad -2,\quad \frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{3},\ \text{etc.}$$

(Voir *Nouvelles Annales*, t. XIX, *Bulletin*, p. 39.)

On aura, d'après les équations (10), (11),

$$R = \frac{N}{m+1},\quad R_0 = \frac{m+1}{m}r,\quad R_1 = \frac{m}{2m+1}R_0;$$

et par conséquent, en ayant égard aux équations (14),

$$\rho_1 = \left(\frac{m}{2m+1}\right)^2 \rho_0;$$

les deux premières donnent une règle facile pour construire les rayons R et R_0; et en plaçant les deux dernières valeurs dans les équations (15), on obtient

$$\frac{m.\rho_0}{R_0} = \left(\frac{1+m}{1-m}\right)\frac{\rho}{R},\quad \left(\frac{m+1}{m}\right)^4 R^2 = \frac{1}{m^2}R_0^2 + \rho_0^2.$$

La seconde des deux relations précédentes, dans le cas particulier $m = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire dans le cas où la roulette est la chaînette engendrée par le foyer d'une parabole, donne le théorème de M. Lamarle, démontré aussi par M. Mannheim (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 375).

6. Quand la base de la roulette est une droite et que le rayon R_0 est donné en fonction de α_0, on obtient les équations

$$\varphi(p, r) = 0,\quad \psi(p_0, \alpha_0) = 0$$

de la courbe mobile et de la roulette au moyen des rela-

tions (12) et de la formule connue

$$\frac{d^2 p_0}{d\alpha_0^2} + p_0 = R_0.$$

Si l'on connaît l'équation $\varphi(p, r) = 0$, on trouve promptement l'équation différentielle de la roulette, en posant dans cette dernière $p = y$, $r = y\frac{ds}{dx}$.

Réciproquement, si dans l'équation $f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ de la roulette, on pose

$$(16) \qquad y = p, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{r^2 - p^2}}{p},$$

on aura l'équation $\varphi(p, r) = 0$ de la courbe mobile.

Par exemple, soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En tirant la valeur de x et prenant la dérivée, on a

$$b^2(b^2 - y^2) = a^2 y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

et au moyen des relations (16) :

$$(a^2 - b^2)\, p^2 = a^2 r^2 - b^4,$$

équation d'une épicycloïde rapportée au centre du cercle fixe.

De même, en prenant pour équations des roulettes

$$y = mx - b, \quad y^2 = 2ax + b^2,$$

on trouve

$$r = \sqrt{m^2 + 1}\,.p, \quad r^2 = p^2 + a^2.$$

La première de ces équations représente la spirale logarithmique rapportée au point asymptotique; et la se-

conde représente une développante du cercle, rapportée au centre.

7. Si l'on suppose que la base C_2 de la roulette soit égale à la courbe mobile C, on aura $R_2 = R$, et les équations (6), (7), (14) donneront :

$$s'_0 = 2.s'_1, \quad R_0 = 2R_1, \quad \rho_0 = 4\rho_1.$$

De plus, en nommant p_0, q_0, r_0; p_2, q_2, r_2, les droites analogues à p, q, r, et qui se rapportent aux courbes C_0 et C_2, en prenant l'origine en un point O_2, on obtient aisément

$$(p_0 - r)^2 + r_0^2 - p_0^2 = r_2^2, \quad (q_2 - q)^2 + (p_2 + p)^2 = r_0^2;$$

et ces relations, dans le cas où les points O et O_2 sont semblablement placés à l'égard des deux courbes égales C, C_2, c'est-à-dire dans le cas où $p_2 = p$, $q_2 = q$, $r_2 = r$, donnent

$$(17) \qquad r = \frac{1}{2}\frac{r_0^2}{p_0}, \quad p = \frac{1}{2} r_0.$$

En substituant ces valeurs à r, p dans l'équation $\varphi(p, r) = 0$ de la courbe mobile, on a celle de la roulette.

Les formules (17) font connaître (*voir* l'ouvrage cité dans les *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 33) que la roulette est semblable à la podaire de la courbe mobile, et est aussi égale à la courbe nommée par M. Quetelet, *caustique secondaire* de la courbe mobile, le point lumineux étant celui qui engendre la roulette.

Par conséquent, sachant (ouvrage précité) que les podaires prises par rapport *à l'origine* des courbes suivantes :

Circonférence, origine en un point quelconque; *spirale logarithmique*, origine au point asymptotique; *hyperbole*

équilatère, origine au centre; *épicycloïde*, origine au centre du cercle fixe; *ellipse*, origine à l'un des foyers; *parabole*, origine au foyer, ou bien au sommet, etc.,

Sont, par ordre, ces autres lignes :

Conchoïde circulaire, spirale logarithmique, lemniscate de Bernoulli, épitrochoïde, circonférence, droite, ou bien *cissoïde de Dioclès*, etc.,

On pourra immédiatement conclure quelle est la roulette engendrée par l'origine de l'une des premières courbes, lorsque cette courbe roule sur une courbe qui lui est égale.

SOLUTION DE LA QUESTION 637

PAR M. EUGÈNE BELTRAMI.

L'énoncé de la question est le suivant :

Les quatre faces d'un tétraèdre passent, chacune, par un point fixe; les trois côtés de l'une des quatre faces sont assujettis à rester, chacun, sur un plan fixe; trouver le lieu géométrique du sommet du tétraèdre opposé à cette face.

Ce lieu est, en général, une surface du troisième degré, qui se réduit à un cône du second degré quand les quatre points fixes sont situés sur un même plan.

R. SALMON.

Soient $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, les équations des trois plans fixes dans lesquels doivent se trouver les côtés de l'une des faces du tétraèdre; (x_0, y_0, z_0) le point par lequel doit toujours passer le plan de cette face; (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) les trois autres points fixes. Nous désignerons ces quatre points par (0), (1), (2), (3), respectivement. Soient, enfin, u_1, v_2, w_3,

les valeurs de u, v, w correspondantes aux points (1), (2), (3), respectivement.

Cela posé, désignons par

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan de la face qui passe par le point (0). L'équation du plan de la face, passant par le point (1), sera de la forme

$$Ax + By + Cz + D + \lambda u = 0,$$

et comme cette dernière équation doit être satisfaite par les coordonnées du point (1), on aura

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda u_1 = 0.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on trouve pour le plan de la face du tétraèdre, qui passe par le point (1), l'équation

$$A(ux_1 - u_1 x) + B(uy_1 - u_1 y) + C(uz_1 - u_1 z) + D(u - u_1) = 0.$$

Les plans des deux autres faces, passant par les points (2) et (3), sont représentés par des équations analogues. En éliminant A, B, C, D entre ces trois équations et l'équation

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

on obtient pour le lieu cherché l'équation

$$(1)\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ ux_1 - u_1 x & uy_1 - u_1 y & uz_1 - u_1 z & u - u_1 \\ vx_2 - v_2 x & vy_2 - v_2 y & vz_2 - v_2 z & v - v_2 \\ wx_3 - w_3 x & wy_3 - w_3 y & wz_3 - w_3 z & w - w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

D'où l'on voit immédiatement que ce lieu est du troisième ordre.

On peut transformer l'équation précédente en celle-ci :

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z & 1 \\ 0 & x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ u_1 & ux_1 & uy_1 & uz_1 & u \\ v_2 & vx_2 & vy_2 & vz_2 & v \\ w_3 & wx_3 & wy_3 & wz_3 & w \end{vmatrix} = 0$$

Puis, en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & \alpha_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & \alpha_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & \alpha_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} \quad (\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1),$$

et en développant le déterminant (2) par rapport aux éléments de la première colonne, l'équation (2) se transforme en celle-ci :

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} uvw\,\Delta = u_1 vw & \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \\ + v_2 uw & \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \\ + w_3 uv & \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Lorsque les quatre points (0), (1), (2), (3) sont dans un même plan, représenté par l'équation

$$p = ax + by + cz + d = 0,$$

on a, comme on sait, non-seulement $\Delta = 0$, mais aussi

$$\frac{d\Delta}{dx_i} : a = \frac{d\Delta}{dy_i} : b = \frac{d\Delta}{dz_i} : c = \frac{d\Delta}{d\alpha_i} : d = h_i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

et l'équation (3) se réduit à

$$\left(h_1 \frac{u_1}{u} + h_2 \frac{v_2}{v} + h_3 \frac{w_3}{w}\right) p = 0.$$

Par suite le lieu se décompose dans le système formé par le plan

$$p = 0$$

et par la surface du second degré

$$h_1 \frac{u_1}{u} + h_2 \frac{v_2}{v} + h_3 \frac{w_3}{w} = 0.$$

Cette surface est évidemment un cône circonscrit au trièdre

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 637

PAR M. GR.... (POITIERS.)

Soient : x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point fixe de la face opposée au sommet libre ; x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; x_3, y_3, z_3 celles des trois autres points fixes ;

$$X = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1,$$
$$Y = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2,$$
$$Z = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3,$$

trois polynômes qui égalés à zéro donneront les équations des trois plans fixes. Je représenterai le résultat de la substitution, dans un de ces polynômes, des coordonnées

d'un point, en donnant l'indice commun de ses coordonnées à la lettre qui représente ce polynôme.

Cela posé, soit

$$\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \nu(z - z_0) = 0$$

l'équation d'un plan quelconque passant par le point (o); les trois autres faces d'un tétraèdre admettant ce plan pour base, et construit d'après les conditions de l'énoncé, ont évidemment pour équations

$$\frac{\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \nu(z - z_0)}{\lambda(x_1 - x_0) + \mu(y_1 - y_0) + \nu(z_1 - z_0)} = \frac{X}{X_1},$$

$$\frac{\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \nu(z - z_0)}{\lambda(x_2 - x_0) + \mu(y_2 - y_0) + \nu(z_2 - z_0)} = \frac{Y}{Y_2},$$

$$\frac{\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \nu(z - z_0)}{\lambda(x_3 - x_0) + \mu(y_3 - y_0) + \nu(z_3 - z_0)} = \frac{Z}{Z_3}.$$

Il suffit d'éliminer λ, μ, ν entre ces trois équations pour avoir l'équation du lieu; mais ces équations étant homogènes et du premier degré, il suffit pour cela d'égaler à o le déterminant

$$\begin{vmatrix} (x - x_0)X_1 - (x_1 - x_0)X & (y - y_0)X_1 - (y_1 - y_0)X & (z - z_0)X_1 - (z_1 - z_0)X \\ (x - x_0)Y_2 - (x_2 - x_0)Y & (y - y_0)Y_2 - (y_2 - y_0)Y & (z - z_0)Y_2 - (z_2 - z_0)Y \\ (x - x_0)Z_3 - (x_3 - x_0)Z & (y - y_0)Z_3 - (y_3 - y_0)Z & (z - z_0)Z_3 - (z_3 - z_0)Z \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation montre déjà que le lieu est du troisième degré et passe par les points (1), (2), (3); mais elle peut considérablement se simplifier. Chaque terme étant la somme de deux quantités, il suffit de développer par lignes; on obtiendra ainsi huit déterminants en prenant chacun des termes d'une ligne avec ceux d'une autre; mais quatre de ces déterminants sont nuls, comme ayant deux ou trois lignes égales. Il restera

$$
\begin{aligned}
&X_1YZ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}
+ Y_2XZ \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix} \\
&+ Z_3XY \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \end{vmatrix}
- XYZ \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix} = 0;
\end{aligned}
$$

ou, plus simplement,

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&X_1YZ \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}
+ Y_2XZ \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\
&+ Z_3XY \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix}
- XYZ \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Il est facile d'étudier les sections de cette surface par

les plans principaux qui se présentent naturellement dans le problème :

1° Par l'un des plans fixes donnés ; soit $Z = 0$.

L'équation (1) se décompose alors en

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui montre que les droites résultant des intersections des plans fixes entre eux, et de chacun d'eux avec le plan passant par le point (0) et les deux points situés dans les faces dont aucune arête n'est dans le plan considéré, que ces droites, dis-je, sont sur la surface.

2° Par le plan (0, 1, 2) ou

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

On a $Z = 0$ et une courbe du second ordre

$$X_1 Y \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + Y_2 X \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = XY \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

dont on connaît cinq points (1, 2 et les trois intersections entre elles des traces des plans fixes donnés sur le plan en question).

On peut aussi examiner ce que devient la surface dans divers cas particuliers.

Particulièrement, supposons que les quatre points fixes donnés soient dans un même plan : le tétraèdre formé avec ces quatre points comme sommets est nul ; par suite

le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

qui en exprime le volume à un facteur constant près, est nul.

Les trois autres déterminants exprimant, au même facteur constant près, les volumes de tétraèdres ayant leur sommet au point décrivant le lieu, et leurs bases sur le plan des quatre points fixes, sont proportionnels aux produits de la perpendiculaire P abaissée de ce point sur le plan des points fixes, par les surfaces des triangles qui forment les bases de ces tétraèdres. Je désignerai ces bases en mettant entre parenthèses les indices des sommets; l'équation de la surface s'écrit donc

$$P[X_1(0, 2, 3)YZ + Y_2(0, 1, 3)XZ + Z_3(0, 1, 2)XY] = 0.$$

On parvient à la même équation en remarquant que chacun de ces déterminants égalé à 0 donne l'équation du plan des points fixes. Ces polynômes sont donc égaux au produit de la perpendiculaire déja désignée par P par la racine carrée de la somme des carrés des coefficients des variables, c'est-à-dire par

$$\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & y_0 & z_0 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \dots}$$

et le théorème des projections des surfaces montre que ce radical est égal à (0, 2, 3).

La perpendiculaire, P, égalée à 0 donne le plan des points; et le second facteur de l'équation, une surface conique du second degré, si les trois plans fixes se coupent

en un même point; sinon, il faut que l'un des plans soit parallèle à l'intersection des deux autres, et, en substituant à Z, $X+Y+\alpha$, on reconnaît que la surface est un cylindre. Cette substitution n'abaisserait pas le degré de l'équation générale.

QUESTIONS.

648. On donne l'équation d'une courbe en coordonnées polaires $f(\rho, \omega)=0$; considérant ω comme constante, on prend la dérivée de cette équation par rapport à ρ; on élimine ρ entre cette équation et l'équation donnée : que représente, relativement à la courbe $f(\rho, \omega)=0$, l'équation résultant de cette élimination? Examiner en particulier le cas où l'on donne l'équation polaire d'une circonférence ou l'équation polaire d'une conique rapportée à l'un de ses foyers; expliquer les circonstances que l'on rencontre dans ces cas particuliers, et former des équations de courbes d'ordre supérieur au second qui présentent des circonstances analogues.

(MANNHEIM.)

649. On donne une surface conique du second degré sur laquelle on peut placer un trièdre trirectangle; on sait qu'on peut en placer alors une infinité; par les trois arêtes de l'un de ces trièdres on mène des plans normaux à cette surface; ces trois plans se coupent suivant une même droite dont on demande le lieu, lorsqu'on déplace le trièdre sur la surface conique. (MANNHEIM.)

650. On donne un point P dans le plan d'une conique; on sait que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur toutes les tangentes de la conique a un point double en P. Démontrer que les centres de courbure de cette courbe correspondant à ce point double

sont à égale distance du diamètre qui contient le point P (*). (MANNHEIM.)

651. Par deux points A, B pris dans le plan d'une courbe de degré quelconque, on décrit une circonférence; on fait le produit des distances du point A à tous les points d'intersection de cette circonférence et de la courbe donnée; on fait le produit analogue pour le point B : le rapport de ces produits est constant, quelle que soit la circonférence passant par les points A et B.

(LAGUERRE.)

652. Soient P et P′ deux polyèdres convexes, semblables et semblablement placés, le premier intérieur au second. Prenons sur chaque face de P′ un point et joignons-le aux sommets de la face homologue du polyèdre P: nous formerons ainsi un polyèdre Q, à faces triangulaires, inscrit dans le polyèdre P′ et circonscrit au polyèdre P. Soit Q′ un quatrième polyèdre formé en joignant un point pris sur chaque face de P aux sommets de la face homologue de P′. En désignant par P, P′, Q, Q′ les volumes des quatre polyèdres, on aura

$$Q = \sqrt[3]{P^2 P'}, \quad Q' = \sqrt[3]{PP'^2},$$

d'où l'on déduira

$$QQ' = PP', \quad \frac{Q}{Q'} = \sqrt[3]{\frac{P}{P'}}.$$

P.

(*) On nous a fait remarquer que l'existence de quatre séries de cercles isogonaux à trois cercles donnés (*voir* p. 95) avait été démontrée par M. Mannheim en 1853 (*Nouvelles Annales*, t. XII, p. 113). Dans cet article, M. Mannheim faisait voir que le lieu des centres des cercles qui coupent trois cercles situés dans un même plan, sous un angle donné, est composé de l'ensemble de quatre droites qui passent toutes par le centre radical des trois cercles donnés. P.

653. Démontrer la relation suivante :

$$\left.\begin{array}{l}(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c)^2 - 4\sin^2(a+b+c)\\ \times(\cos^2 a\cos^2 b + \cos^2 b\cos^2 c + \cos^2 a\cos^2 c)\\ - 4\cos a\cos b\cos c\cos(a+b+c)\\ \times[\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + \cos^2(a+b+c)]\\ - 2\cos^2(a+b+c)(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c)\\ + 4\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c + 8\cos a\cos b\cos c\\ \times\cos(a+b+c) + \cos^4(a+b+c)\end{array}\right\} = 0.$$

(Strebor.)

654. Démontrer que si $\varphi(2\omega) = \varphi(\omega).\cos\omega$, on aura $\varphi(\omega) = \varphi(o)\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}$. (Valton.)

655. Soient OA, OB les demi-axes d'une ellipse dont le centre est O; ANC la circonférence décrite du point O comme centre avec OA pour rayon; MN une perpendiculaire à l'axe OA, rencontrant l'ellipse au point M, et la circonférence ANC en N; P le point où l'ellipse est rencontrée par le rayon ON, et Q le point de rencontre de la circonférence et d'une perpendiculaire à l'axe OA, menée par P : si l'on prend OR = OP sur la direction du rayon OQ, la droite RM sera tangente à l'ellipse et perpendiculaire à OR. (Sacchi.)

BIBLIOGRAPHIE.

The Oxford, Cambridge and Dublin messenger of Mathematics. — *Journal destiné aux jeunes mathématiciens des Universités d'Angleterre*, et rédigé par des membres des trois universités (*).

Cette publication, fondée en 1861, à Cambridge, a

(*) Ce journal, publié en trois livraisons, par année, se trouve chez

pour objet de propager les méthodes, les théories, les découvertes nouvelles, et d'offrir aux jeunes mathématiciens un moyen facile de communiquer leurs idées.

Elle contient une série d'articles qui sont, pour la plupart, relatifs à l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie; quelques-uns, cependant, exigent, pour être entendus, la connaissance du calcul différentiel et du calcul intégral. Le volume (année 1862) contient aussi des articles intéressants sur le calcul des *quaternions*, dû à sir William Hamilton.

Nous recommandons ce journal à ceux de nos lecteurs qui voudraient prendre connaissance des méthodes adoptées pour l'enseignement des sciences, en Angleterre. La direction donnée aux études scientifiques, dans ce pays, diffère beaucoup de celle que nous suivons en France; chacune d'elles a son bon côté, et c'est pourquoi il est utile de les connaître toutes deux.

Giornale di matematiche ad uso delli studenti delle universita italiane, publicato per cura dei professori *G. Battaglini, V. Janni* e *N. Trudi* (*).

Le premier numéro de ce journal, destiné aux étudiants des Universités d'Italie, a paru à Naples en janvier dernier. Nous en rendrons compte prochainement.

Mac Millan et Cie à Londres et à Cambridge, et se vend aux principaux libraires de Paris, au prix de 2 *schillings* et 6 *pences*, par livraison. Chaque numéro est composé de quatre feuilles in-8, avec une planche sur pierre.

(*) Napoli, Benedetto Pellerano editore, libreria scientifica industriale, strada di Chiaia, 60.

RECHERCHES SUR LA SURFACE DES ONDES;

PAR M. DURRANDE;
Professeur au lycée de Moulins.

I.

Équation qui donne les axes d'une section diamétrale d'un ellipsoïde en fonction des paramètres du plan sécant. — Théorème qu'on en déduit.

Soient :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

l'équation d'un ellipsoïde, et

$$Ax+By+Cz=0 \tag{2}$$

celle d'un plan passant par son centre.

Cherchons l'équation d'où l'on puisse déduire les demi-axes de la section elliptique faite dans la surface par le plan (2).

Il suffit pour cela de prendre les formules qui servent à obtenir l'équation de la courbe dans son plan.

Voici le tableau de ces formules :

$$\left\{\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi + y'\cos\theta\sin\varphi,\\ y &= y'\sin\varphi - y'\cos\theta\cos\varphi,\\ z &= y'\sin\theta, \end{aligned}\right.$$

φ et θ s'exprimant en A, B, C par les formules suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\tan\varphi = -\frac{A}{B}, && \cos\theta = \frac{-C}{S},\\ &\sin\varphi = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}, && \sin\theta = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{S},\\ &\cos\varphi = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}. && S^2 = A^2+B^2+C^2. \end{aligned}\right.$$

Si on substitue les valeurs de (x, y, z) dans l'équation de la surface, l'équation de la courbe d'intersection prend la forme $Mx^2 + Pxy + Ny^2 = 1$, et l'on sait que les inverses des carrés des demi-axes sont les racines de l'équation

$$X^2 - (M + N)X + \frac{4MN - P^2}{4} = 0.$$

C'est précisément l'équation cherchée; si l'on met à la place de M, N, P leurs valeurs en A, B, C, on trouve facilement que l'équation cherchée est la suivante, dans laquelle ρ désigne l'une des racines :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{\rho}\right)^4 - \frac{1}{S^2}\left[\frac{A^2a^2(b^2+c^2)+B^2b^2(a^2+c^2)+C^2c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2c^2}\right]\frac{1}{\rho^2} \\ &\quad + \frac{1}{S^2}\left(\frac{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2}{a^2b^2c^2}\right) = 0\ (^*). \end{aligned} \right.$$

Je désigne par R et R′ les deux racines de cette équation; on aura entre les racines et les coefficients les relations bien connues :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} = \frac{1}{S^2}\left[\frac{A^2a^2(b^2+c^2)+B^2b^2(a^2+c^2)+C^2c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2c^2}\right], \\ &\frac{1}{R^2R'^2} = \frac{1}{S^2}\left(\frac{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2}{a^2b^2c^2}\right). \end{aligned} \right.$$

On peut se proposer de chercher l'expression de la différence $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}$. Il suffit d'élever au carré la première des relations précédentes et d'en retrancher quatre fois la seconde. On trouvera, en effectuant les calculs :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}\right)^2 S^4a^4b^4c^4 \\ &= [A^2a^2(b^2-c^2) + B^2b^2(a^2-c^2) + C^2c^2(a^2-b^2)]^2 \\ &\quad - 4A^2C^2a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2). \end{aligned}$$

(*) Cette équation coïncide, à la notation près, avec la première équation de la p. 270, t. XX. (Question 575, résolue par M. Kessler.) P.

Cherchons, d'autre part, les angles que fait le plan (2) avec les plans des sections circulaires de l'ellipsoïde. Ces plans sont compris dans l'équation

$$(4)\qquad cx\sqrt{a^2-b^2}\pm az\sqrt{b^2-c^2}=0;$$

on en conclut facilement que les angles du plan (2), avec les plans représentés par les équations (4), ont pour cosinus les expressions suivantes :

$$\cos V=\frac{Ac\sqrt{a^2-b^2}+Ca\sqrt{b^2-c^2}}{bS\sqrt{a^2-c^2}}$$

$$\cos V'=\frac{Ac\sqrt{a^2-b^2}-Ca\sqrt{b^2-c^2}}{bS\sqrt{a^2-c^2}},$$

d'où l'on conclut sans peine :

$$b^4S^4\sin^2V\sin^2V'=[A^2a^2(b^2-c^2)+B^2b^2(a^2-c^2)$$
$$+C^2c^2(a^2-b^2)]^2-4A^2C^2a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2),$$

et par suite

$$(5)\qquad \frac{1}{R^2}-\frac{1}{R'^2}=\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\sin V\sin V',$$

expression qui montre que *le produit des sinus des angles qu'un plan diamétral quelconque fait avec les plans des sections circulaires d'un ellipsoïde est proportionnel à la différence des carrés des inverses des demi-axes de la section faite par le plan diamétral dans l'ellipsoïde*.

II.

Définition et équation de la surface des ondes. — Nature des sections faites dans la surface par les plans coordonnés. — Points singuliers.

Nous venons de voir que, lorsqu'on coupe un ellipsoïde

par un plan (2), on obtient une section elliptique dont les axes sont 2R, 2R'; cela posé :

Si, sur une perpendiculaire ou normale au plan de cette section, menée par le centre et de part et d'autre du centre, on porte les longueurs des demi-axes R, R', *et qu'on fasse ensuite mouvoir le plan de la section de toutes les manières autour du centre, le lieu des extrémités des longueurs portées sur la normale correspondante est une surface qu'on désigne sous le nom de* surface des ondes.

Proposons-nous de trouver l'équation de cette surface.

Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point de la normale au plan (2); on a entre ces coordonnées et les paramètres du plan les relations

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}, \tag{6}$$

et si l'on détermine le point (x, y, z) par la condition qu'il soit à une distance du centre égale à l'une des racines ρ de l'équation (3), on aura en outre la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2. \tag{7}$$

Or, il est clair que l'équation de la surface des ondes résulte de l'élimination de ρ, A, B, C entre les équations (3), (6), (7). Cette élimination conduit à l'équation

$$(8)\ \left\{\begin{array}{l} (x^2 + y^2 + z^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) \\ - a^2(b^2 + c^2)x^2 - b^2(a^2 + c^2)y^2 - c^2(a^2 + b^2)z^2 + a^2b^2c^2 = 0. \end{array}\right.$$

Telle est l'équation de la surface des ondes.

Pour nous faire une idée de la forme générale de la surface, nous chercherons la nature des courbes que l'on obtient en la coupant par les plans coordonnés.

Si l'on fait $z = 0$ dans l'équation (8), elle prend la forme

$$(x^2 + y^2 - c^2)(a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2) = 0,$$

équation qui se décompose en deux autres,

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=c^2 \\ a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2 \end{array}\right\} \text{ avec } z=0,$$

lesquelles représentent un cercle et une ellipse. Le cercle est intérieur à l'ellipse, si $a>b>c$.

Pour $x=0$, on aura de même

$$(y^2+z^2-a^2)(b^2y^2+c^2z^2-b^2c^2)=0,$$

d'où l'on déduit :

$$\left\{\begin{array}{c} y^2+z^2=a^2 \\ b^2y^2+c^2z^2=a^2c^2 \end{array}\right\} \text{ avec } x=0,$$

équations qui représentent un cercle et une ellipse; mais le cerle est extérieur à l'ellipse. Enfin, pour $y=0$, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+z^2=b^2 \\ a^2x^2+c^2z^2=a^2c^2 \end{array}\right\} \text{ avec } y=0,$$

équations qui représentent encore un cercle et une ellipse qui se coupent en quatre points, dont les coordonnées sont :

$$x=\pm c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\quad y=0,\quad z=\pm a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Si l'on construit les portions de ces courbes d'intersection situées dans l'angle dièdre des coordonnées positives, on aura une idée de la forme générale de la surface des ondes.

Il est clair, d'après la définition d'où nous sommes partis, que la surface des ondes se compose de deux nappes distinctes. En effet, les sections diamétrales de l'ellipsoïde ont leurs axes inégaux ; la normale à l'une de ces sections rencontre donc la surface des ondes en deux points

distincts situés de part et d'autre du centre ; les sections circulaires seules ont leurs axes égaux, et par suite les normales à ces sections *menées par le centre* ne rencontrent la surface des ondes qu'en un seul point de chaque côté du plan sécant. Il n'y a donc que quatre points communs aux deux nappes de la surface des ondes, et ces quatre points sont les points communs au cercle et à l'ellipse, traces de la surface sur le plan des zx.

III.

Coniques sphériques et ellipsoïdales. — Nouvelles définitions de la surface des ondes.

Théorème. — *Si l'on fait mouvoir le plan d'une section diamétrale de l'ellipsoïde* (1), *de telle sorte que l'un des axes de cette section reste constant, la normale au plan sécant décrira un cône du second degré. Et suivant que l'un ou l'autre des deux axes restera constant, la normale décrira deux séries de cônes orthogonaux et homofocaux.*

Soient, comme précédemment, R et R′ les deux demi-axes d'une section diamétrale quelconque de l'ellipsoïde; si l'on fait mouvoir le plan de la section de manière que l'un des axes reste égal à 2R, les extrémités de cet axe devant se trouver à la fois sur l'ellipsoïde,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et sur la sphère,

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1,$$

cet axe décrira un cône,

$$(9)\quad (a^2-R^2)\frac{x^2}{a^2}+(b^2-R^2)\frac{y^2}{b^2}+(c^2-R^2)\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Ce cône est un de ceux que M. Chasles désigne sous le

nom de *cônes conjoints*. (Voir *Journal de Liouville*, t. III, p. 431.) Il résulte des belles propriétés démontrées par le savant géomètre, que le cône (9) a constamment pour plan tangent le plan de la section diamétrale lui-même ; par suite la normale à ce plan décrit le cône supplémentaire du cône (9), c'est-à-dire le cône représenté par l'équation

$$(10) \qquad \frac{a^2x^2}{a^2 - R^2} + \frac{b^2y^2}{b^2 - R^2} + \frac{c^2z^2}{c^2 - R^2} = 0.$$

Et, en vertu de la réciprocité des propriétés des cônes supplémentaires, le plan tangent au cône (10) est le plan mené par la normale et par le second axe de la section.

Si on laisse constant le second axe R′ de la section diamétrale, la normale décrira le cône

$$(11) \qquad \frac{a^2x^2}{a^2 - R'^2} + \frac{b^2y^2}{b^2 - R'^2} + \frac{c^2z^2}{c^2 - R'^2} = 0,$$

lequel a pour plan tangent le plan conduit par la normale et par le premier axe R de la section diamétrale.

Donc les plans tangents aux cônes (10) et (11), suivant une arête commune, se coupent à angle droit ; donc les deux séries de cônes (10) et (11) sont telles, que chacun des cônes de la première coupe orthogonalement chacun de ceux de la seconde, et réciproquement.

De plus, tous ces cônes sont homofocaux ; en effet, leurs cônes supplémentaires étant des cônes conjoints, M. Chasles a fait voir qu'ils ont tous leurs sections circulaires parallèles aux sections circulaires de l'ellipsoïde ; donc tous les cônes représentés par les équations (10) et (11) ont pour lignes focales les normales aux sections circulaires de l'ellipsoïde.

Théorème. — *Les deux séries de cônes* (10) et (11) *coupent la surface des ondes suivant deux séries de co-*

niques sphériques et ellipsoïdales, qui sont aussi des courbes orthogonales.

Les points de la surface des ondes qui se trouvent à une distance du centre constante et égale à R sont sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$

mais il résulte de la définition de la surface que ces points sont aussi sur le cône (10), lieu des positions de la normale au plan diamétral de la section dont l'un des axes est égal à R. Donc le cône (10) coupe la surface des ondes suivant une courbe représentée par les deux équations

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ & \frac{a^2x^2}{a^2 - R^2} + \frac{b^2y^2}{b^2 - R^2} + \frac{c^2z^2}{c^2 - R^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette courbe est une conique sphérique. Il est d'ailleurs facile de voir que l'élimination de R entre ces deux équations reproduirait l'équation de la surface des ondes.

Si l'on donne à R toutes les valeurs depuis $R = c$ jusqu'à $R = a$, on voit que la courbe représentée par les équations (12) donnera tous les points de la surface des ondes. Or à cette courbe en répond une tracée sur l'ellipsoïde et qui est fournie par l'intersection de la même sphère et du cône supplémentaire du cône (10). Si on convenait d'appeler coniques sphériques *supplémentaires* celles qui résultent de l'intersection d'une même sphère par deux cônes supplémentaires, on pourrait donner de la surface des ondes une nouvelle définition fort simple et qui permettrait d'obtenir immédiatement son équation. On pourrait dire que :

La surface des ondes est le lieu des coniques sphériques supplémentaires des coniques sphériques tracées sur la surface de l'ellipsoïde.

Tandis que le cône (10) coupe l'une des nappes de la

surface des ondes suivant la courbe (12), il coupe la seconde nappe suivant une courbe représentée par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &x'^2+y'^2+z'^2=R'^2,\\ &\frac{a^2x'^2}{a^2-R^2}+\frac{b^2y'^2}{b^2-R^2}+\frac{c^2z'^2}{c^2-R^2}=0; \end{aligned}\right.$$

mais R' est une quantité variable. On peut mettre ces équations sous une autre forme. Nous savons qu'il existe entre R et R' des relations qui expriment que ces deux quantités sont les racines de l'équation (3). Si dans ces relations on substitue à A, B, C, les coordonnées d'un point de la normale au plan diamétral, on aura

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned} &R^2+R'^2=\frac{a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(a^2+c^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2}{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2},\\ &R^2R'^2=\frac{a^2b^2c^2(x^2+y^2+z^2)}{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}. \end{aligned}\right.$$

De la seconde de ces deux équations, en y mettant les coordonnées (x', y', z') du point de la normale qui est à une distance R' du centre, on tire

$$a^2x'^2+b^2y'^2+c^2z'^2=\frac{a^2b^2c^2}{R^2},$$

et si on désigne le second membre par P'^2, on voit que le cône (10) coupe la surface suivant une courbe qui est en même temps sur l'ellipsoïde

$$a^2x'^2+b^2y'^2+c^2z'^2=P'^2,$$

en sorte que les équations de cette seconde courbe sont

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned} &a^2x'^2+b^2y'^2+c^2z'^2=P'^2,\\ &\frac{x'^2}{P'^2-b^2c^2}+\frac{y'^2}{P'^2-a^2c^2}+\frac{z'^2}{P'^2-a^2b^2}=0. \end{aligned}\right.$$

Réciproquement, si (x, y, z) est l'extrémité du rayon

vecteur variable et (x', y', z') celle du rayon constant, ces points décriront les courbes suivantes :

$$(15)\quad \begin{cases} a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = P^2, \\ \dfrac{x^2}{P^2 - b^2c^2} + \dfrac{y^2}{P^2 - a^2c^2} + \dfrac{z^2}{P^2 - a^2b^2} = 0, \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 = R'^2, \\ \dfrac{a^2x'^2}{a^2 + R'^2} + \dfrac{b^2y'^2}{b^2 - R'^2} + \dfrac{c^2z'^2}{c^2 - R'^2} = 0. \end{cases}$$

D'où il résulte qu'un même point de la surface des ondes se trouve à la fois sur une conique sphérique (12) et sur une conique ellipsoïdale (15).

Il est bien facile de voir que ces deux courbes se coupent orthogonalement.

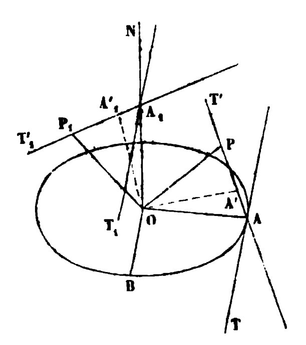
En effet, la tangente à la courbe sphérique, au point (x, y, z), est perpendiculaire au rayon de la sphère (12), ou à l'arête commune des deux cônes orthogonaux (10) et (11); elle est donc perpendiculaire au plan tangent à ce dernier et, par suite, à la tangente à la conique ellipsoïdale qui s'y trouve.

Voici une démonstration géométrique, qui a l'avantage de conduire à une autre propriété très-importante de la surface des ondes.

Soient OA, OB, les deux demi-axes d'une section elliptique, ON la direction de la normale : on doit porter les longueurs OA, OB sur la normale pour avoir des points de la surface des ondes. Occupons-nous du point A. Soit $OA_1 = OA$. Menons au point A la tangente AT à la section elliptique AOB, et une autre tangente à l'ellipsoïde, AT', perpendiculaire à la première.

Si l'axe OA reste constant, il reste comme nous l'avons vu dans le plan OAB, et par suite le point A se meut sur la tangente AT en décrivant un élément de conique sphérique. Mais comme le mouvement du plan tangent à un

cône peut être considéré comme une suite de mouve-



ments angulaires autour de l'arête de contact, qui en est l'axe instantané de rotation, il en résulte que pendant le mouvement de l'axe constant OA, l'axe variable OB et la normale ON se déplacent dans un plan BON perpendiculaire à OA. Si au contraire c'est OB qui reste constant, l'axe OA et la normale se déplacent dans le plan AON, ce qui montre, ainsi que nous l'avions déjà vu, que suivant que OA ou OB restent constants, la normale décrit deux cônes orthogonaux.

Mais ceci prouve en outre que les extrémités des axes eux-mêmes décrivent deux séries de courbes se coupant à angle droit; car suivant que OA ou OB sera l'axe constant, le point A se déplacera sur la tangente AT ou sur la tangente AT'. Examinons comment se meut le point A_1 qui lui correspond sur la surface des ondes. Pendant que le point A décrit un élément de conique sphérique, il en est de même du point A_1, et la tangente à ce dernier est parallèle à OB et par suite à AT. Si, au contraire, l'axe OA est variable, le point A se meut sur une courbe qui a pour tangente AT', et le point A_1 sur une courbe qui a pour tangente $A_1T'_1$, située dans le plan AON, et partant perpendiculaire à A_1T_1.

Ceci prouve bien que les deux espèces de coniques décrites par l'extrémité du rayon vecteur de la surface des ondes se coupent à angle droit. Mais on peut remarquer en outre que la tangente $A_1T'_1$, qui est située dans un même plan avec la tangente AT', est perpendiculaire sur cette dernière. Si l'on considère une position de OA infiniment voisine OA' dans le plan AON, et pareillement une position OA'_1 de OA_1, on remarquera sans peine que les deux triangles OAA' et $OA_1A'_1$ sont égaux, et par suite que les deux tangentes AT' et $A_1T'_1$ sont rectangulaires.

Enfin, et c'est la conclusion principale à laquelle je voulais arriver par cette démonstration géométrique, on voit que *le plan tangent à la surface des ondes au point* A_1 *s'obtient en faisant tourner le plan tangent à l'ellipsoïde au point* A, *de* 90° *autour de l'axe* OB.

Cette propriété est une des plus importantes de la surface des ondes. (*La fin prochainement.*)

CORRESPONDANCE.

M. Cremona nous prie d'insérer la lettre suivante que M. de Jonquières lui a adressée :

« Vera-Cruz, le 6 février 1863.

« Monsieur,

» Vous avez eu la bonté, dans votre *Introduction à la* » *théorie des courbes planes*, de citer quelques théo- » rèmes que j'ai donnés dans un article inséré au t. VI » (2e série) du *Journal de M. Liouville* pour 1861. J'ai » l'honneur de vous faire remarquer que plusieurs de » ces théorèmes sont énoncés par moi en termes *trop* » *absolus*, quand il s'agit des séries de courbes d'ordre *n*

» et d'indice N. Les nombres qui figurent dans ces énon-
» cés sont absolument exacts si, les courbes étant d'un
» degré quelconque, l'indice N = 1, c'est-à-dire si la sé-
» rie est un faisceau, ou encore si, l'indice N étant quel-
» conque, les courbes se réduisent à des droites. Mais,
» pour n et N à la fois quelconques, les nombres dont
» il s'agit (sauf celui du théorème I) sont des *limites su-*
» *périeures* et non des nombres absolus, ce que j'ai eu
» tort de ne pas dire. Il faut donc ajouter à la plupart
» de ces théorèmes ces mots : *en général et au plus*. Par
» exemple, l'énoncé du théorème V doit se terminer
» ainsi : ... *le lieu des points d'intersection de deux*
» *courbes* C_m, C_n *correspondantes est en général et au*
» *plus du degré* $N(m+n)$.

» Il en est ainsi, en particulier, du théorème IX, que
» M. Bischoff a énoncé le premier, sans restriction; du
» moins il a été énoncé ainsi dans les *Nouvelles Annales*
» *de Mathématiques*. Quand je le lus dans le manuscrit
» de ce journal, j'écrivis à l'excellent et regrettable
» M. Terquem pour le prévenir que le théorème me
» semblait trop général, car il ne s'appliquait pas aux
» coniques; aussi M. Terquem ajouta-t-il une note très-
» discrète. Plus tard, il me vint des scrupules d'avoir osé
» suspecter l'analyse de M. Bischoff, qui est très-honora-
» blement connu dans la science, et je préférai me sus-
» pecter moi-même. De là les efforts que je fis, dans
» l'article précité du *Journal de M. Liouville*, pour me
» mettre d'accord avec M. Bischoff, et notamment dans
» le § XI, où je me livre, à l'égard des coniques, à des
» insinuations qu'elles ne méritent sans doute pas.

» J'ai reconnu, depuis lors, qu'il eût été plus sage de
» m'en tenir à ma première opinion, et, comme je ne
» voudrais pas que l'insuffisance de ma rédaction pût in-
» duire en erreur de jeunes géomètres, je m'empresse de

» vous la signaler, en vous autorisant, Monsieur, à faire » dans ce but l'usage que vous voudrez de la présente » lettre. »

Note. — Par la publication de cette lettre de son savant ami, M. Cremona se propose de prémunir les jeunes lecteurs de son *Introduzione* contre les défauts des énoncés qui concernent les séries de courbes d'indice quelconque. Une Note rectificative de M. de Jonquières sur le même sujet a été insérée dans le XXVI[e] volume du *Journal de M. Liouville* (février 1863).

NOTE SUR LES IMAGINAIRES;

PAR M. JULES SABATIÉ.

Dans tous les Cours d'Algèbre on a soin de remarquer que les nombres négatifs n'ont point de logarithmes, et l'on renvoie aux livres d'analyse pour y montrer que l'on peut trouver pour les nombres négatifs des logarithmes réductibles à la forme générale des quantités imaginaires, $a + b\sqrt{-1}$.

En trigonométrie, il se présente aussi des fonctions impossibles, lorsqu'en étudiant les fonctions inverses on tombe sur des expressions de la forme

$$(1) \qquad y = \arcsin(1 + k^2),$$

car il n'existe point d'arc dont le sinus soit plus grand que le rayon.

Je crois que, jusqu'ici, on s'est borné à dire que de tels arcs n'existent pas, négligeant de rechercher si de telles quantités ne sont point réductibles à la forme $a + b\sqrt{-1}$. Or, je vais démontrer qu'il en est ainsi.

Pour cela je ferai remarquer qu'une fonction quelconque telle que (1) peut rentrer dans la suivante

(2) $$y = \text{arc sin}\sqrt{1+x^2}$$

qui se prête mieux au calcul.

Or, si maintenant nous convenons d'étendre à ces fonctions les règles ordinaires de la différentiation (convention qui évidemment n'a rien que de permis, puisque ces mêmes règles ont été étendues aux fonctions imaginaires), l'expression (2) nous donne :

$$dy = \frac{d.\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{-x^2}} = \frac{\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}}{x\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

et par conséquent

$$y = C - \sqrt{-1}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

en traitant, selon l'usage, $\sqrt{-1}$ comme une constante. Or

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}+dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \int\frac{d.(\sqrt{1+x^2}+x)}{x+\sqrt{1+x^2}} = \text{l}\,(x+\sqrt{1+x^2}),$$

de sorte que

$$y \text{ ou arc sin}\sqrt{1+x^2} = C - \sqrt{-1}\,\text{l}\,(x+\sqrt{1+x^2}).$$

Reste à déterminer la constante arbitraire. Pour cela faisons $x = 0$ dans l'égalité précédente, et prenons, ce que nous sommes libres de faire, la valeur positive de $\sqrt{1}$; il vient ainsi

$$\text{arc sin } 1 = C - \sqrt{-1}\,\text{l}.1 = C,$$

d'où

$$C = 2k\varpi + \frac{\varpi}{2},$$

k étant, à l'ordinaire, un nombre positif, négatif ou nul. On a donc en définitive

$$(a)\quad \arcsin\sqrt{1+x^2} = \left(2k\varpi + \frac{\varpi}{2}\right) - \sqrt{-1}\,\mathrm{l}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Avant d'aller plus loin, il est bon de vérifier que cette formule n'est point en contradiction avec la formule des logarithmes imaginaires. Pour cela donnons à x la valeur zéro, dans l'expression (a), mais prenons la valeur négative de $\sqrt{1}$; il vient

$$\arcsin(-1) = \left(2k\varpi + \frac{\varpi}{2}\right) - \sqrt{-1}\,\mathrm{l}.(-1),$$

mais on sait que

$$\mathrm{l}(-1) = (2n\varpi + \varpi)\sqrt{-1}.$$

On a donc

$$\arcsin(-1) = \left(2k\varpi + \frac{\varpi}{2}\right) + (2n\varpi + \varpi)$$
$$= 2(n+k)\varpi + \frac{3\varpi}{2},$$

résultat conforme à ce que l'on trouve directement.

Prenons encore la fonction

$$y = \arccos\sqrt{1+x^2}.$$

Par des calculs identiques aux précédents, on arrive à la formule suivante :

$$(b)\quad \arccos\sqrt{1+x^2} = 2k'\varpi + \sqrt{-1}\,\mathrm{l}.\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),$$

de sorte qu'en ajoutant (a) et (b) on a

$$\text{arc sin}\sqrt{1+x^2} + \text{arc cos}\sqrt{1+x^2} = 2(k+k')\varpi + \frac{\varpi}{2};$$

comme dans les cas ordinaires.

En appliquant la même méthode aux fonctions suivantes

$$\text{arc séc}\,\frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{arc coséc}\,\frac{1}{1+x^2},$$

on arrive à des formules analogues; de telle sorte que les arcs dont les sinus ou cosinus sont plus grands que l'unité et les sécantes ou cosécantes moindres que 1 sont réductibles à la forme type $a+b\sqrt{-1}$.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 624

(voir 2e série, t. Ier, p. 345);

PAR M. EUGÈNE BELTRAMI.

Un angle trièdre trirectangle mobile a son sommet en un point fixe pris sur une surface quelconque du second ordre; le plan déterminé par les intersections de ses trois arêtes avec cette surface passe constamment par un même point de la normale issue du sommet fixe de l'angle trièdre. On demande le lieu de ce point, lorsque le sommet du trièdre parcourt la surface donnée.

(MANNHEIM.)

Soient

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

l'équation de la surface, (x_0, y_0, z_0) un quelconque de ses points; on aura identiquement

$$(1) \qquad ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1.$$

En désignant par δ la distance de l'origine au plan tangent en ce point, les cosinus des angles que la normale fait avec les axes des x, y et z, seront respectivement

$$-\delta a x_0, \quad -\delta b y_0, \quad -\delta c z_0.$$

Cela posé, concevons un nouveau système d'axes orthogonaux des ξ, η et ζ, ayant leur origine au point (x_0, y_0, z_0) et formant avec les axes primitifs des angles dont les cosinus sont indiqués dans le tableau suivant :

	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

En nommant λ, μ, ν les cosinus des angles que la normale fait avec ces nouveaux axes, on aura

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= -\delta(a\alpha_1 x_0 + b\beta_1 y_0 + c\gamma_1 z_0), \\ \mu &= -\delta(a\alpha_2 x_0 + b\beta_2 y_0 + c\gamma_2 z_0), \\ \nu &= -\delta(a\alpha_3 x_0 + b\beta_3 y_0 + c\gamma_3 z_0), \end{aligned} \right.$$

et les équations des droites ξ, η et ζ, rapportées aux premiers axes, seront respectivement

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + \xi\alpha_1, \\ y &= y_0 + \xi\beta_1, \\ z &= z_0 + \xi\gamma_1, \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + \eta\alpha_2, \\ y &= y_0 + \eta\beta_2, \\ z &= z_0 + \eta\gamma_2, \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + \zeta\alpha_3, \\ y &= y_0 + \zeta\beta_3, \\ z &= z_0 + \zeta\gamma_3, \end{aligned} \right.$$

dans chacune desquelles les variables des deux systèmes se rapportent au même point de l'espace.

Au moyen de ces équations et des équations (1) et (2), on trouve, pour les intersections des trois nouveaux axes

avec la surface, les valeurs suivantes de ξ, η et ζ, que nous désignerons par ξ_0, η_0 et ζ_0 :

$$\frac{1}{\xi_0}=\frac{\delta(a\alpha_1^2+b\beta_1^2+c\gamma_1^2)}{2\lambda},$$

$$\frac{1}{\eta_0}=\frac{\delta(a\alpha_2^2+b\beta_2^2+c\gamma_2^2)}{2\mu},$$

$$\frac{1}{\zeta_0}=\frac{\delta(a\alpha_3^2+b\beta_3^2+c\gamma_3^2)}{2\nu},$$

de sorte que l'équation, en ξ, η et ζ, du plan mené par ces trois points, pourra se mettre sous la forme

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\xi(a\alpha_1^2+b\beta_1^2+c\gamma_1^2)}{\lambda}+\frac{\eta(a\alpha_2^2+b\beta_2^2+c\gamma_2^2)}{\mu}\\ &\qquad+\frac{\zeta(a\alpha_3^2+b\beta_3^2+c\gamma_3^2)}{\nu}=\frac{2}{\delta}. \end{aligned} \right.$$

Or, l'équation de la normale étant

$$\frac{\xi}{\lambda}=\frac{\eta}{\mu}=\frac{\zeta}{\nu}=r,$$

la distance r_0 du point (x_0, y_0, z_0) au point d'intersection avec le plan (3) est donnée par la formule

$$r_0=\frac{2}{\delta(a+b+c)},$$

et comme celle-ci est indépendante de la direction des droites ξ, η et ζ, la première partie de la question se trouve ainsi démontrée.

Si maintenant on désigne par x, y, z les coordonnées (relatives aux premiers axes) du point que l'on vient de déterminer, on a

$$x=x_0-\frac{2ax_0}{a+b+c},\quad y=y_0-\frac{2by_0}{a+b+c},$$

$$z=z_0-\frac{2cz_0}{a+b+c},$$

d'où l'on tire

$$x_0 = \frac{a+b+c}{-a+b+c}x, \quad y_0 = \frac{a+b+c}{a-b+c}y, \quad z_0 = \frac{a+b+c}{a+b-c}z.$$

En éliminant x_0, y_0, z_0 au moyen de l'équation (1), on obtient enfin

$$\frac{a(a+b+c)^2}{(-a+b+c)^2}x^2 + \frac{b(a+b+c)^2}{(a-b+c)^2}y^2 + \frac{c(a+b+c)^2}{(a+b-c)^2}z^2 = 1,$$

équation du lieu cherché, qui, partant, est une surface de second ordre, ayant en commun avec la première le centre et la direction des axes.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 287

(voir t. XIII, p. 191, et t. XVII, p. 254);

PAR M. FORTUNATO PADULA,
Professeur à Naples.

Si l'on divise un polyèdre homogène en tétraèdres au moyen de droites menées d'un point quelconque M aux sommets du polyèdre, et si l'on suppose la masse de chaque tétraèdre réunie au centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre, le centre de gravité de ce système de points matériels est toujours le même, quel que soit le point M.

(BELLAVITIS.)

Soit $A_1 A_2 \ldots A_n$ une des faces du polyèdre donné P; par le point A_1 supposons que l'on tire les diagonales $A_1 A_3$, $A_1 A_4$, ..., $A_1 A_{n-1}$: $MA_1 A_{r-1} A_r$ sera un des tétraèdres dans lesquels on aura décomposé le polyèdre donné : soit C_ω le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre, et Ox, Oy, Oz trois axes orthogonaux. On

nommera :

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r & \beta_r, & \gamma_r \\ x_\omega, & y_\omega, & z_\omega \\ s, & t, & u \end{array}\right\} \text{les coordonnées des points} \left\{\begin{array}{l} A_1 \\ \ldots \\ A_r \\ C_\omega \\ M \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \\ \ldots \\ d_r \\ n \end{array}\right\} \text{les distances} \left\{\begin{array}{l} OA_1 \\ \ldots \\ OA_r \\ OM \end{array}\right.$$

v_ω le volume du tétraèdre $MA_1A_{r-1}A_r \ldots$

Les coordonnées x_ω, y_ω, z_ω seront déterminées, comme l'on sait, par les équations

$$(\alpha_1 - s)x_\omega + (\beta_1 - t)y_\omega + (\gamma_1 - u)z_\omega = \frac{1}{2}(d_1^2 - n^2),$$

$$(\alpha_{r-1} - s)x_\omega + (\beta_{r-1} - t)y_\omega + (\gamma_{r-1} - u)z_\omega = \frac{1}{2}(d_{r-1}^2 - n^2),$$

$$(\alpha_r - s)x_\omega + (\beta_r - t)y_\omega + (\gamma_r - u)z_\omega = \frac{1}{2}(d_r^2 - n^2),$$

et en faisant

$$\Delta_\omega = \begin{vmatrix} \alpha_1 - s & \beta_1 - t & \gamma_1 - u \\ \alpha_{r-1} - s & \beta_{r-1} - t & \gamma_{r-1} - u \\ \alpha_r - s & \beta_r - t & \gamma_r - u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s & t & u \\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} \\ 1 & \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix}$$

$$\Delta'_\omega = \begin{vmatrix} d_1^2 - n^2 & \beta_1 - t & \gamma_r - u \\ d_{r-1}^2 - n^2 & \beta_{r-1} - t & \gamma_{r-1} - u \\ d_r^2 - n^2 & \beta_r - t & \gamma_r - u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & n^2 & t & u \\ 1 & d_1^2 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & d_{r-1}^2 & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} \\ 1 & d_r^2 & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix}$$

$$\Delta''_\omega = \begin{vmatrix} \alpha_1 - s & d_1^2 - n^2 & \gamma_1 - u \\ \alpha_{r-1} - s & d^2_{r-1} - n^2 & \gamma_{r-1} - u \\ \alpha_r - s & d_r^2 - n^2 & \gamma_r - u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s & n^2 & u \\ 1 & \alpha_1 & d_1^2 & \gamma_1 \\ 1 & \alpha_{r-1} & d^2_{r-1} & \gamma_{r-1} \\ 1 & \alpha_r & d_r^2 & \gamma_r \end{vmatrix}$$

$$\Delta'''_\omega = \begin{vmatrix} \alpha_1 - s & \beta_1 - t & d_r^2 - n^2 \\ \alpha_{r-1} - s & \beta_{r-1} - t & d^2_{r-1} - n^2 \\ \alpha_r - s & \beta_r - t & d_r^2 - n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s & t & n^2 \\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 & d_1^2 \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & d^2_{r-1} \\ 1 & a_r & \beta_r & d_r^2 \end{vmatrix}$$

on obtiendra

$$x_\omega = \frac{\Delta'_\omega}{2\Delta_\omega}, \quad y_\omega = \frac{\Delta''_\omega}{2\Delta_\omega}, \quad z_\omega = \frac{\Delta'''_\omega}{2\Delta_\omega},$$

où le déterminant $\Delta_\omega = 6v_\omega$. D'ailleurs, si, par tous les sommets A_1, A_2, etc., du polyèdre donné, on mène des parallèles à l'axe Ox, sur lesquelles, à partir du plan yz, on porte des distances proportionnelles respectivement à d_1^2, d_2^2, etc. (c'est-à-dire, en faisant $d_\omega^2 = m\delta_\omega$, égales à δ_1, δ_2, etc.), on aura des points A'_1, A'_2, etc., que l'on peut prendre pour sommets d'un nouveau polyèdre P', dont les faces seront déterminées par les triangles $A'_1 A'_{r-1} A'_r$ correspondants aux triangles dans lesquels on aura décomposé les faces du polyèdre donné. Soit M' le point que l'on obtient de M par la même construction, ou bien, faisant $n^2 = mv$, le point (v, t, u); nommons v'_ω le volume du tétraèdre $M' A'_1 A'_{r-1} A'_r$, et l'on aura

$$\Delta'_\omega = \begin{vmatrix} 1 & mv & t & u \\ 1 & m\delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & m\delta_{r-1} & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} \\ 1 & m\delta_r & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & v & t & u \\ 1 & \delta_1 & \beta_1 & \gamma \\ 1 & \delta_{r-1} & \beta_{1-1} & \gamma_{r-1} \\ 1 & \delta_r & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix} = 6mv'_\omega,$$

et par conséquent

$$x_\omega = \frac{m}{2} \cdot \frac{v'_\omega}{v_\omega}.$$

Mais X étant l'x du centre de gravité des masses réunies aux points C_ω, on a

$$X = \frac{\Sigma v_\omega x_\omega}{\Sigma v_\omega},$$

donc on obtiendra

(1) $$X = \frac{m}{2} \cdot \frac{\Sigma v'_\omega}{\Sigma v_\omega} = \frac{mV'}{2V},$$

où V, V' sont les volumes des polyèdres P et P'.

Pareillement, si l'on forme deux autres polyèdres P'' et P''' par des constructions analogues à celle indiquée pour le polyèdre P', on aura

(2) $$Y = \frac{mV''}{2V},$$

(3) $$Z = \frac{mV'''}{2V};$$

mais les volumes V', V'', V''' des polyèdres P', P'', P''' ne dépendent nullement de la position du point M. Donc, etc.

Remarques.

1. Dans la formation des déterminants Δ_ω, il est nécessaire de disposer les éléments de manière qu'il en résulte pour Δ une valeur positive ou négative selon que v_ω entre positivement ou négativement dans la composition du volume total V. La disposition des éléments des déterminants Δ'_ω, Δ''_ω, Δ'''_ω doit être réglée d'après celle des éléments correspondants de Δ_ω. Et enfin pour chaque volume v_ω que l'on doit regarder comme négatif dans la composition de V, il faut substituer au lieu du poids de la masse v_ω une force verticale négative appliquée au centre C_ω et proportionnelle à v_ω.

2. Les points A'_1, A'_2,..., A'_n ne sont pas en général

dans un même plan, quoique les points A_1, A_2,..., A_n soient les sommets d'une même face du polyèdre donné : donc, lorsqu'on divise le polyèdre P en tétraèdres, on peut prendre le point M d'une manière quelconque, mais il faut décomposer chaque face toujours dans les mêmes triangles, sans quoi les volumes V', V'', V''' ne resteraient pas constants, parce que les polyèdres P', P'', P''' eux-mêmes changeraient, et en conséquence le point (X, Y, Z), pourvu que l'on y considère des couples comme il sera dit dans le n° 6 pour un cas plus général.

3. Si le polygone $A_1 A_2 \ldots, A_n$ est inscriptible dans un cercle, on peut démontrer que les points A'_1, A'_2,..., A'_n, seront dans un même plan. Dans ce cas on peut diviser la face $A_1 A_2 \ldots A_n$ en triangles d'une manière quelconque, parce que la pyramide $M'A'_1 A'_2 \ldots A'_n$ du polyèdre P', correspondante à la pyramide $MA_1 A_2 \ldots A_n$ dans le polyèdre P, restera toujours la même.

4. Si le polyèdre P est inscriptible dans une sphère, on peut fixer à son centre l'origine des coordonnées, et l'on aura $d_1 = d_2 = d_3 = \ldots$; donc tous les sommets du polyèdre P' seront dans un même plan parallèle au plan yz, et par conséquent $V' = 0$; on aura de même $V'' = 0$, $V''' = 0$. Dans ce cas, le centre de gravité du système de points indiqués dans la question est le centre de la sphère circonscrite au polyèdre.

5. Si, au lieu de diviser le polyèdre en tétraèdres ayant tous le même sommet, on le divise d'une manière quelconque, il est évident que le théorème a toujours lieu, pourvu que les tétraèdres qui aboutissent aux faces du polyèdre donné aient toujours pour bases les mêmes triangles dans lesquels on aura décomposé chaque face du polyèdre. La démonstration reste la même, parce que v_t, v'_t étant les volumes de deux tétraèdres correspondants quelconques dans les polyèdres P, P', on aura de

même

$$X = \frac{m}{2}\frac{\Sigma v'_g}{\Sigma v_g} = \frac{mV'}{2V}.$$

6. Pour diviser chaque face du polyèdre en triangles, on pourrait prendre dans le plan de la face $A_1 A_2 \ldots A_n$, que l'on considère, un point N, et former les triangles $NA_1 A_2$, $NA_2 A_3, \ldots, NA_n A_1$, alors on aura le même théorème et le même point (X, Y, Z) pourvu que l'on regarde le point N comme sommet de $n-2$ tétraèdres $NA_1 A_2 A_3$, $NA_1 A_3 A_4, \ldots, NA_1 A_{n-1} A_n$ de volume nul. Dans ce cas, pour chaque tétraèdre $NA_1 A_{r-1} A_r$, on aura pour centre de la sphère circonscrite un point C_{r-2} situé à l'infini sur la perpendiculaire à la face $A_1 A_2 \ldots A_n$ élevée par le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1 A_{r-1} A_r$, et le poids que l'on doit appliquer à ce point C_{r-2} est nul. Ce poids doit être remplacé, comme on déduit des équations trouvées ci-dessus, par un couple. En effet, la position des points C étant indépendante des axes des coordonnées, supposons que l'origine soit au centre du cercle $A_1 A_{r-1} A_r$ circonscrit au triangle $A_1 A_{r-1} A_r$, et son plan celui des xy. Soit N la projection du point M sur la face $A_1 A_2 \ldots A_n$ ou bien sur le plan xy. Nommons k_{r-2} la *puissance* du point N par rapport au cercle $A_1 A_{r-1} A_{r-2}$: on aura, quel que soit le point M_1,

$$x_\omega = 0,\ y_\omega = 0,\ z_\omega = \frac{\Delta'''_\omega}{2\Delta_\omega} = \frac{\Delta'''_\omega}{12 v_\omega},\quad v_\omega z_\omega = \frac{1}{12}\Delta'''_\omega;$$

mais à cause de

$$\gamma_1 = \gamma_{r-1} = \gamma_r = 0,\quad d_1 = d_{r-1} = d_r,$$

on a

$$\Delta_\omega = -u \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \\ 1 & \alpha_r & \beta_r \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\omega}''' = d_1^2 \begin{vmatrix} 1 & s & t & \frac{n^2}{d_1^2} \\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & 1 \\ 1 & \alpha_r & \beta_r & 1 \end{vmatrix} = d_1^2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & 1 \\ \alpha_r & \beta_r & 1 \end{vmatrix} - n^2 \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \\ 1 & \alpha_r & \beta_r \end{vmatrix}$$

$$= (d_1^2 - n^2) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \\ 1 & \alpha_r & \beta_r \end{vmatrix} = -(u^2 + k_{r-2}) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \\ 1 & \alpha_r & \beta_r \end{vmatrix},$$

donc on obtiendra

$$z_\omega = \frac{1}{2}\left(u + \frac{k_{r-2}}{u}\right), \quad v_\omega z_\varpi = \frac{1}{6} A_1 A_{r-1} A_r (u^2 + k_{r-2}).$$

Lorsque le point M coïncide avec le point N, on a

$$u = 0, \quad v_\omega = 0, \quad z_\omega = \infty;$$

mais

$$v_\omega z_\omega = \frac{1}{6} A_1 A_{r-1} A_r . k_{r-2}:$$

donc, si sur la perpendiculaire élevée sur la face $A_1 A_2 \ldots A_n$, du côté extérieur, on porte une droite quelconque a, il y aura aux extrémités de cette droite un couple $\left(\frac{A_1 A_{r-1} A_r . k_{r-2}}{6a}, \; -\frac{A_1 A_{r-1} A_r . k_{r-2}}{6a}\right)$.

De même on déterminera les couples qu'on aura des autres tétraèdres de volume nul, et le centre de gravité de toutes les masses et des couples sera le point (X, Y, Z) déterminé par les équations (1), (2), (3).

Il faut observer que dans la formule $\frac{A_1 A_{r-1} A_r . k_{r-2}}{6a}$ la puissance k_{r-2} est positive ou négative, selon que le point N est extérieur ou intérieur par rapport au cercle $A_1 A_{r-1} A_r$, et que l'aire du triangle $A_1 A_{r-1} A_r$ sera tou-

jours positive si le polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$ est convexe, et en général aura le même signe que dans l'équation

$$A_1 A_2 \ldots A_n = \Sigma_3^2 A_1 A_{r-1} A_r.$$

Enfin, pourvu que la droite a reste parallèle à elle-même, on peut la fixer dans telle position qu'on voudra, et à ses extrémités agira toujours le même couple (*). Si le point N sur la circonférence du cercle $A_1 A_{r-1} A_r$ on aura $k_{r-2} > 0$, et par conséquent il n'y aura pas de couple à considérer.

7. Si l'on ne veut pas introduire les couples susdits, c'est-à-dire si l'on veut considérer seulement les tétraèdres effectifs dans lesquels on a divisé le polyèdre, alors le théorème aura lieu pour tous les systèmes de tétraèdres que l'on peut former sans changer la position des points N, quelle que soit d'ailleurs la manière de diviser le polyèdre en tétraèdres. Dans cette hypothèse, les polyèdres P′, P″, P‴ changeront de forme et de volume; ils dépendront de la position des points N dont les coordonnées doivent être introduites dans les formules trouvées : ainsi le polyèdre P′ aura pour faces les triangles $N' A'_1 A'_2$, $N' A'_2 A'_3, \ldots, N' A'_n A'_1$, etc., et son volume sera égal à

$$\Sigma v'_\omega = \frac{1}{6} \Sigma \Delta'_\omega,$$

où

$$\Delta'_\omega = \begin{vmatrix} 1 & n^2 & t & u \\ 1 & h^2 & b & c \\ 1 & d_{r-1}^2 & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} \\ 1 & d_r^2 & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix}.$$

(*) C'est une remarque à faire sur la théorie du centre d'un système de forces parallèles, que lorsqu'il y a un couple (P, — P) appliqué à deux points M, N, si l'on mène une droite M′ N′ égale et parallèle à la droite MN et dirigée dans le même sens, on peut transporter le couple (P, — P) aux points M′, N′ sans changer la position du centre du système.

a, b, c étant les coordonnées du point N, et

$$h^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Dans ce cas, quand même le polyèdre P serait inscriptible dans une sphère, le centre de gravité du système des points C_ω qu'on obtiendra sera en général différent du centre de la sphère, à moins que tous les points N n'existent sur la sphère circonscrite au polyèdre, c'est-à-dire sur les sections respectives produites par ses faces dans la sphère.

DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN DÉ A JOUER (QUESTION 307)

(voir t. XIV, p. 262);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon (institution Sainte-Barbe).

1. Étant donné un solide homogène de forme cubique, on creuse sur ses faces des cavités toutes égales entre elles qu'on appelle points, et qui satisfont aux conditions suivantes :

Le nombre de points de chaque face est inférieur à 7 et varie d'une face à l'autre ;

Deux points, soit d'une même face, soit de deux faces différentes, ne se pénètrent pas ;

Les points d'une même face sont disposés de telle sorte, que les projections de leurs centres de gravité sur cette face ont pour centre de moyenne distance le centre de la face elle-même.

On demande la position du centre de gravité du solide ainsi obtenu.

2. Pour fixer les idées, nous supposerons que le solide proposé reposant sur un plan horizontal, un observateur

est placé, debout, dans son intérieur, vis-à-vis une face; nous désignerons par :

P_1 la face horizontale située sous ses pieds ;

P_2 la face verticale située devant lui ;

P_3 la face verticale située à sa droite ;

P_4 la face verticale située à sa gauche ;

P_5 la face verticale située derrière lui ;

P_6 la face horizontale située au-dessus de sa tête ;

$n_1, n_2, \ldots, n_6$, nombres de points de ces faces ;

p, rapport entre le volume du cube primitif et celui d'un des points ;

δ, distance de chaque face au centre de gravité d'un de ses points ;

c, côté du cube primitif.

Les nombres $n_1, \ldots, n_6$ étant distincts et plus petits que 7, on a

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_6 = 21.$$

3. Rappelons-nous :

1° Que si l'on projette plusieurs points géométriques appartenant à un même plan et leur centre de moyennes distances sur un plan parallèle au leur, la projection de ce centre est le centre de moyennes distances des projections de ces points ;

2° Que le centre des moyennes distances des centres de gravité de plusieurs corps égaux est le centre de gravité du système que forment ces corps.

4. Il en résulte que le centre de gravité du système que forment les points d'une même face se trouve sur la droite qui joint le centre de cette face au centre de la face opposée et à une distance de la première égale à la distance de cette même face au centre de gravité de l'un de ses points.

5. Soient P_1 le plan des $(x.y)$; P_2 le plan des $(y.z)$;

P_6 le plan des $(z.x)$, les demi-axes des coordonnées positives étant dirigés suivant les arêtes du cube primitif;

ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité de ce cube;

$(x_1.y_1.z_1),\ldots,(x_6.y_6.z_6)$ les centres de gravité des différents systèmes que forment les points de chaque face; on a:

$$\xi = \frac{1}{2}c, \qquad \eta = \frac{1}{2}c,$$

$$x_1 = \frac{1}{2}c, \qquad y_1 = \frac{1}{2}c,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}c, \qquad y_2 = c - \delta = \frac{1}{2}c + \left(\frac{1}{2}c - \delta\right),$$

$$x_3 = \delta = \frac{1}{2}c - \left(\frac{1}{2}c - \delta\right), \qquad y_3 = \frac{1}{2}c,$$

$$x_4 = c - \delta = \frac{1}{2}c + \left(\frac{1}{2}c - \delta\right), \qquad y_4 = \frac{1}{2}c,$$

$$x_5 = \frac{1}{2}c, \qquad y_5 = \delta = \frac{1}{2}c - \left(\frac{1}{2}c - \delta\right),$$

$$x_6 = \frac{1}{2}c, \qquad y_6 = \frac{1}{2}c,$$

$$\zeta = \frac{1}{2}c,$$

$$z_1 = \delta = \frac{1}{2}c - \delta\left(\frac{1}{2}c - \delta\right),$$

$$z_2 = \frac{1}{2}c,$$

$$z_3 = \frac{1}{2}c,$$

$$z_4 = \frac{1}{2}c,$$

$$z_5 = \frac{1}{2}c$$

$$z_6 = c - \delta = \frac{1}{2}c + \left(\frac{1}{2}c - \delta\right).$$

6. Au centre de gravité appliquons deux forces verticales dirigées en sens contraire l'une de l'autre, et respectivement égales au poids de la matière qui le remplissait.

Il est facile de voir que le centre de gravité cherché est le centre de sept forces verticales :

L'une, dirigée de haut en bas, appliquée au centre du cube primitif et égale à son poids ;

Les six autres dirigées de bas en haut, respectivement appliquées aux centres de gravité des différents systèmes que forment les points de chaque face et égales au poids de la matière qui les remplissait ; ces forces étant les poids de corps formés d'une même substance sont proportionnelles à leurs volumes, volumes que représentent

$$c^3, \quad \frac{n_1}{p}c^3, \ldots, \frac{n_6}{p}c^3,$$

et par conséquent proportionnelles aux nombres

$$p, \quad n_1, \; n_2, \ldots, \; n_6.$$

x, y, z représentant les coordonnées du centre de gravité cherché ou ses distances aux plans P_3, P_5, P_1, on a, en vertu de la théorie des moments :

$$x = \frac{1}{2}c + \frac{n_3 - n_4}{p - 2I}\left(\frac{1}{2}c - \delta\right),$$

$$y = \frac{1}{2}c + \frac{n_5 - n_2}{p - 2I}\left(\frac{1}{2}c - \delta\right),$$

$$z = \frac{1}{2}c + \frac{n_1 - n_6}{p - 2I}\left(\frac{1}{2}c - \delta\right).$$

7. Soit D la distance de ce centre de gravité au centre de gravité du cube primitif ; en posant

$$N = (n_3 - n_4)^2 + (n_5 - n_2)^2 + (n_1 - n_6)^2,$$

on aura :

$$D = \frac{\sqrt{N}}{p - 21}\left(\frac{1}{2}c - \delta\right);$$

le maximum et le minimum de D correspondent au maximum de N.

8. Les points dont le nombre sur chaque face est inférieur à 7 et varie d'une face à l'autre peuvent être répartis de quinze manières différentes ; si l'on calcule les quinze valeurs correspondantes de n, on trouve :

Que sa valeur minimum 3 correspond au cas où 1 est opposé à 2, 3 à 4, 5 à 6;

Que sa valeur maximum 35 correspond au cas où 1 est opposé à 6, 2 à 5, 3 à 4;

Cette dernière disposition est précisément celle qui existe dans le dé à jouer ordinaire ; c'est la seule où la somme des points opposés soit constante.

9. Soient $d_1, \ldots, d_6$ les distances du centre de gravité du dé à jouer ordinaire, aux faces marquées 1.2,.., 5.6; les formules A, en y posant

$$n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 3,\ n_4 = 4,\ n_5 = 5,\ n_6 = 6,$$

donnent

$$d_1 = \frac{1}{2}c - \frac{5}{p-21}\left(\frac{1}{2}c - \delta\right) = \frac{p-26}{p-21}\cdot\frac{c}{2} + \frac{5}{p-21}\delta,$$

$$d_2 = \frac{1}{2}c - \frac{3}{p-21}\left(\frac{1}{2}c - \delta\right) = \frac{p-24}{p-21}\cdot\frac{c}{2} + \frac{3}{p-21}\delta,$$

$$d_3 = \frac{1}{2}c - \frac{1}{p-21}\left(\frac{1}{2}c - \delta\right) = \frac{p-22}{p-21}\cdot\frac{c}{2} + \frac{1}{p-21}\delta,$$

$$d_4 = \frac{1}{2}c + \frac{1}{p-21}\left(\frac{1}{2}c - \delta\right) = \frac{p-20}{p-21}\cdot\frac{c}{2} - \frac{1}{p-21}\delta,$$

$$d_5 = \frac{1}{2}c + \frac{3}{p-21}\left(\frac{1}{2}c - \delta\right) = \frac{p-18}{p-21}\cdot\frac{c}{2} - \frac{3}{p-21}\delta,$$

$$d_6 = \frac{1}{2}c + \frac{5}{p-21}\left(\frac{1}{2}c - \delta\right) = \frac{p-16}{p-21}\cdot\frac{c}{2} - \frac{5}{p-21}\delta.$$

ÉNONCÉ DES QUESTIONS NON RÉSOLUES

Proposées dans les quinze premiers volumes de la première série des Nouvelles Annales.

61. (T. II, p. 48.) Deux pyramides convexes qui ont les faces triangulaires égales, chacune à chacune, et semblablement disposées, sont égales. (CATALAN.)

93. (T. IV, p. 259.) Soient A, B, C les longueurs de trois cordes issues d'un même point d'une circonférence de cercle, B étant la corde intermédiaire; on a, comme il est facile de s'en assurer,

$$(\alpha) \qquad A \sin \widehat{BC} + C \sin \widehat{AB} = B \sin \widehat{AC},$$

et la surface de la sphère; A, B et C représentant trois arcs de grand cercle issus du même point d'un petit cercle et terminés à leur seconde rencontre avec ce même petit cercle, on a une relation qui ne diffère de la précédente qu'en ce que les longueurs A, B, C sont remplacées par $\tang \frac{1}{2} A$, $\tang \frac{1}{2} B$, $\tang \frac{1}{2} C$.

On demande s'il y a une relation analogue à la relation (α) pour quatre cordes de la sphère qui seraient issues d'un même point de la surface.

(PAR UN ABONNÉ.)

119 (*). (T. V, p. 202.) Une droite de longueur constante se mouvant entre deux droites fixes données dans l'espace, chaque point de la droite mobile décrit une ellipse : toutes les ellipses sont dans des plans parallèles ;

(*) Cette question a été traitée par MM. Vauquelin et Wœstyn, t. V, p. 361. Nous n'en reproduisons l'énoncé que pour l'intelligence de la question suivante.

leurs centres sont sur la plus courte distance entre les droites fixes; le lieu des ellipses est une surface du quatrième degré; la droite mobile tourne à chaque instant autour d'une droite de direction constante, perpendiculaire aux deux plans parallèles déterminés par les droites fixes.

120. (T. V, p. 202.) Établir, au moyen du théorème précédent, la théorie de l'axe instantané de rotation d'un corps solide se mouvant dans l'espace d'une manière quelconque.

193. (T. VII, p. 368.) Trouver et discuter l'équation de la surface qui jouit de cette propriété, que la somme des distances de chacun de ses points aux faces d'un angle trièdre trirectangle est constante.

240. (T. X, p. 347.) La position d'équilibre d'un corps surnageant n'a lieu que lorsque la distance du centre de gravité du liquide déplacé au centre de gravité du corps est un maximum ou un minimum, ou bien encore lorsque le centre commun de gravité du corps et du fluide déplacé est à sa plus haute ou plus basse position.

(CLAUSEN.)

245. (T. X, p. 358.) Soit

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n;$$

supposons que x_1 x_2, $x_3, \ldots, x_n$ puissent prendre respectivement $m_1, m_2, \ldots, m_n$ valeurs différentes; alors z aura au plus $m_1\, m_2 \ldots m_n$ valeurs différentes; mais il peut en avoir moins. Dans quel cas?

251. (T. XI, p. 114.) Placer les huit premiers nombres sur une même ligne, de telle sorte que la différence de deux quelconques de ces nombres ne soit pas égale à la différence de leurs rangs dans cette ligne. Combien existe-t-il de dispositions de ce genre? 1 7 5 8 2 4 6 3 est une de ces dispositions.

Placer sur un échiquier huit *reines*, de manière qu'aucune d'elles ne soit en prise à l'une des sept autres. La solution est une conséquence de la précédente.

(E. Lionnet.)

252. En ôtant les doubles du jeu ordinaire du domino, il reste vingt et une pièces. On peut ranger ces vingt et une pièces sur une seule ligne, conformément à la règle du jeu. De combien de manières cet arrangement est-il possible?

317. (T. XV, p. 52.) On donne sur un plan : 1° une conique S; 2° cinq points fixes a, b, c, d, P, dont l'un, a, est pris sur le périmètre de la conique. On propose de mener par le point P une transversale qui coupe la conique en deux points (réels ou imaginaires) ε, φ situés, avec les quatre a, b, c, d, sur une même conique. Démontrer qu'il existe en général deux solutions.

(De Jonquières.)

324. (T. XV, p. 229.) Quelles sont les phases de la terre et les éclipses de terre pour un spectateur placé dans la lune?

325. (T. XV, p. 229.) Soit une équation algébrique $\varphi(x) = q$; tous les coefficients sont supposés entiers positifs, q est entier positif; t étant un nombre entier positif, si l'on a

$$\varphi(t) < q, \quad \varphi(t+1) > q, \quad \text{faisant} \quad h = \frac{q - \varphi(t)}{\varphi(t+1) - \varphi(t)},$$

$t + h$ sera une valeur approchée de x comprise entre t et $t + 1$; discuter cette méthode d'approximation donnée par Cardan.

333. (T. XV, p. 243.) Étant donnée une ligne d'intersection de deux surfaces de degrés m et n, quels sont les degrés respectifs des surfaces formées par les normales principales, les tangentes de la courbe et les axes des plans osculateurs?

342. (T. XV, p. 353.) ABC est un triangle inscrit dans le triangle abc, A est sur bc, B sur ac, C sur ab; trois courbes sont données dans le même plan; AB touche une courbe en γ, AC touche une deuxième courbe en β et BC la troisième courbe en α : on a, pour toute position du triangle ABC,

$$\frac{A\gamma . B\alpha . C\beta}{A\beta . B\gamma . C\alpha} = \frac{aC . bA . cB}{aB . bC . cA}.$$

A démontrer par des considérations de statique.

(Möbius.)

NOTE SUR LES NORMALES AUX SURFACES DU SECOND ORDRE;

Par M. DESBOVES.

Les nouveaux théorèmes sur les normales aux surfaces du second ordre peuvent se déduire très-simplement de quelques équations générales (*). Je me bornerai ici à un petit nombre de propositions relatives à l'ellipsoïde.

Prenons pour axes coordonnés les axes mêmes de l'ellipsoïde, et soient représentés, pour abréger, par L, M, N, R, les polynômes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

$$(b^2 - c^2)yz + c^2 z_0 y - b^2 y_0 z,$$

$$(c^2 - a^2)xz + a^2 x_0 z - c^2 z_0 x,$$

$$(a^2 - b^2)xy + b^2 y_0 x - a^2 x_0 y,$$

(*) *Théorie nouvelle des normales aux surfaces du second ordre.* (Mallet-Bachelier, 1862). Nous rendrons prochainement compte de cet ouvrage. P.

et par l, m, n, r, des constantes arbitraires : il est facile de voir que

$$(1) \qquad lL + mM + nN + rR = 0$$

est l'équation générale de toutes les surfaces du second degré qui passent par les six pieds des normales menées du point (x_0, y_0, z_0) à l'ellipsoïde.

D'abord la surface (1) passe par les pieds des six normales. En effet, $L = 0$ est l'équation de l'ellipsoïde, et on voit facilement que les coordonnées des pieds des normales partant du point x_0, y_0, z_0 doivent satisfaire aux équations

$$M = 0, \quad N = 0, \quad R = 0.$$

La surface (1) passe d'ailleurs par trois points arbitrairement choisis, à cause des trois constantes $\frac{m}{l}$, $\frac{n}{l}$, $\frac{r}{l}$ arbitraires et distinctes. On a donc bien l'équation la plus générale.

Applications de l'équation (1).

THÉORÈME I. — *Jamais les pieds des six normales menées d'un point à l'ellipsoïde ne peuvent être sur une même sphère.*

En effet, les coefficients de x^2, y^2, z^2 dans l'équation (1) ne peuvent devenir égaux pour aucune valeur des constantes.

THÉORÈME II. — *Les six normales menées d'un point à un ellipsoïde se trouvent toujours sur un même cône du second degré.* (CHASLES.)

Il faut faire voir qu'en déterminant convenablement l, m, n, r, le point (x_0, y_0, z_0) pourra être à la fois le centre et un point de la surface.

La première condition donne les trois équations

$$(2)\quad \begin{cases} ry_0 - nz_0 + \dfrac{2lx_0}{a^4} = 0, \\ mz_0 - rx_0 + \dfrac{2ly_0}{b^4} = 0, \\ nx_0 - my_0 + \dfrac{2lz_0}{c^4} = 0. \end{cases}$$

Si on les multiplie respectivement par x_0, y_0, z_0, et qu'on les ajoute membre à membre, il vient

$$2l\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}\right) = 0,$$

et, par suite, $l = 0$.

Les équations (2) donnent alors

$$\frac{m}{x_0} = \frac{n}{y_0} = \frac{r}{z_0}.$$

On exprime ensuite, à la manière ordinaire, que le point (x_0, y_0, z_0) est sur la surface, et l'on a

$$-l + l\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) = 0.$$

La condition est remplie, puisque l est nul, d'après ce qui précède, et le théorème est démontré.

Si, d'ailleurs, on veut avoir l'équation du cône, il suffira, dans l'équation (1), de remplacer l, m, n, r par 0, x_0, y_0, z_0.

Théorème III. — *Si, d'un point quelconque, on mène les six normales à un ellipsoïde et qu'on fasse passer un plan par les pieds de trois quelconques d'entre elles, et un autre par les trois pieds restants, les coordonnées* α, β, γ; α', β', γ' *des pôles des deux plans sont liées par les équations*

$$\alpha\alpha' = -a^2, \quad \beta\beta' = -b^2, \quad \gamma\gamma' = -c^2.$$

Théorème IV. — *Les pôles des plans dont il est question dans l'énoncé précédent se trouvent, quel que soit le point de départ des normales, sur une même surface du quatrième ordre dont l'équation est*

$$(a^2-b^2)^2(a^2b^2\gamma^2-c^2\alpha^2\beta^2)+(a^2-c^2)^2(a^2c^2\beta^2-b^2\alpha^2\gamma^2)$$
$$+(b^2-c^2)^2(b^2c^2\alpha^2-a^2\beta^2\gamma^2)=0.$$

Théorème V. — *Les plans qui ont leurs pôles sur la surface précédente sont tels, que les normales qui ont leurs pieds sur la section correspondante de l'ellipsoïde se coupent trois à trois sur une même droite.*

Les trois théorèmes que nous venons d'énoncer s'établissent immédiatement, et pour ainsi dire sans calcul, en identifiant l'équation (1) et la suivante :

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1\right)\left(\frac{\alpha' x}{a^2}+\frac{\beta' y}{b^2}+\frac{\gamma' z}{c^2}-1\right)=0.$$

Pour étudier de plus près le problème des normales menées des différents points d'une section de l'ellipsoïde, on prend une nouvelle équation générale obtenue comme l'équation (1), mais en choisissant comme axes coordonnés les axes mêmes de l'ellipse de section et une perpendiculaire à son plan menée par son centre.

PROBLÈMES SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE.
LIGNE DES COURBURES SEMBLABLES.

Problème I. — *Mener par le centre de la surface du second degré*

$$(1)\qquad Ax^2+By^2+Cz^2=1$$

un plan représenté par l'équation

$$(2)\qquad \alpha x+\beta y+\gamma z=0,\quad (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1),$$

de telle sorte que la section S *soit une conique semblable à une conique donnée.*

Soient $2E$ et $2F$ les axes de la section cherchée. Comme cette courbe doit être semblable à une conique donnée, le rapport $\frac{E}{F}$ est une quantité connue. Afin que les deux axes entrent d'une manière symétrique dans le calcul, nous poserons

$$\lambda = \frac{E}{F} + \frac{F}{E} = \frac{E^2 + F^2}{EF}.$$

ou

$$(3) \qquad \lambda^2 = \frac{(E^2 + F^2)^2}{E^2 F^2}.$$

Le paramètre λ^2, qui définit l'espèce de la section, sera positif ou négatif selon que cette section sera une ellipse ou une hyperbole. En particulier on aura $\lambda^2 = 4$ dans le cas d'un cercle; $\lambda^2 = 0$, dans le cas d'une hyperbole équilatère; $\lambda^2 = \infty$ dans le cas d'une parabole.

Pour exprimer λ^2 en fonction des données du problème, je fais la projection S′ de la conique S sur le plan des yz. L'équation de cette projection sera

$$A\left(\frac{\beta y + \gamma z}{\alpha}\right)^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

ou bien

$$(A\beta^2 + B\alpha^2)y^2 + (A\gamma^2 + C\alpha^2)z^2 + 2A\beta\gamma yz = \alpha^2.$$

Si l'on nomme $2e$ et $2f$ les axes de S′, on aura

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} = \frac{A(\beta^2 + \gamma^2) + (B + C)\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{(B + C - A)\alpha^2 + A}{\alpha^2}$$

$$\frac{1}{e^2 f^2} = \frac{(A\beta^2 + B\alpha^2)(A\gamma^2 + C\alpha^2) - A\beta^2\gamma^2}{\alpha^4}$$

$$= \frac{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2}{\alpha^2}.$$

On aura donc

$$e^2 f^2 = \frac{\alpha^2}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2},$$

$$e^2 + f^2 = \frac{(B + C - A)\alpha^2 + A}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2}.$$

Remarquons en passant que la valeur de $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2}$ ne dépend que de α, ce qui donne le théorème : *La somme des carrés des inverses des axes est la même pour toutes les sections dont les plans font le même angle avec l'un des axes principaux de la surface.*

Si l'on représente par $2e'$, $2f'$, $2e''$, $2f''$ les axes des projections de la conique S sur les deux autres plans coordonnés, on aura de même

$$e'^2 f'^2 = \frac{\beta^2}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2},$$

$$e''^2 f''^2 = \frac{\gamma^2}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2},$$

$$e'^2 + f'^2 = \frac{(A + C - B)\beta^2 + B}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2},$$

$$e''^2 + f''^2 = \frac{(A + B - C)\gamma^2 + C}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2}.$$

Donc, en vertu des relations (question 634, p. 24)

$$E^2F^2 = e^2 f^2 + e'^2 f'^2 + e''^2 f''^2,$$

$$2E^2 + 2F^2 = e^2 + f^2 + e'^2 + f'^2 + e''^2 + f''^2,$$

nous aurons

$$E^2F^2 = \frac{1}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2},$$

$$E^2 + F^2 = \frac{A\alpha'^2 + B\beta'^2 + C\gamma'^2}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2},$$

en posant

$$\alpha'^2 = 1 - \alpha^2, \quad \beta'^2 = 1 - \beta^2, \quad \gamma'^2 = 1 - \gamma^2.$$

De là on déduit $\frac{(E^2+F^2)^2}{E^2F^2}$, ou

$$(3)\qquad \lambda^2 = \frac{(A\alpha'^2 + B\beta'^2 + C\gamma'^2)^2}{BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2}.$$

Telle est la relation qui doit exister entre les cosinus α, β, γ, qui déterminent la direction du plan sécant, pour que la section soit semblable à la conique dont la forme est déterminée par le paramètre λ^2.

Remarques. — Les sections faites par des plans parallèles dans une surface du second degré étant semblables, l'équation (3) conviendra à la section faite par le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta,$$

quel que soit δ.

La formule (3) conviendrait encore à la section faite par un plan quelconque dans l'un des deux paraboloïdes. Il suffirait de faire nul l'un des coefficients A, B, C.

Problème II. — *Trouver l'équation du lieu des diamètres conjugués aux plans qui remplissent les conditions du problème* I.

Soient

$$(4)\qquad \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}, \qquad (m^2+n^2+p^2=1)$$

les équations du diamètre conjugué au plan (2). On aura

$$\frac{mA}{\alpha} = \frac{nB}{\beta} = \frac{pC}{\gamma} = \sqrt{m^2A^2 + n^2B^2 + p^2C^2}.$$

Les valeurs de α, β, γ, tirées de ces équations et portées dans l'équation (3), donneront

$$\lambda^2 = \frac{\left(A + B + C - \frac{A^3m^2 + B^3n^2 + C^3p^2}{A^2m^2 + B^2n^2 + C^2p^2}\right)^2}{ABC\,\frac{Am^2 + Bn^2 + Cp^2}{A^2m^2 + B^2n^2 + C^2p^2}},$$

ou bien

$$\lambda^2 = \frac{[A^2(B+C)m^2 + B^2(A+C)n^2 + C^2(A+B)p^2]^2}{ABC(Am^2 + Bn^2 + Cp^2)(A^2m^2 + B^2n^2 + C^2p^2)}.$$

Il suffira donc, pour avoir le lieu demandé, d'éliminer m, n, p entre cette équation et les équations (4), ce qui donne, en chassant le dénominateur,

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} ABC\lambda^2(Ax^2 + By^2 + Cz^2)(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) \\ = [A^2(B+C)x^2 + B^2(A+C)y^2 + C^2(A+B)z^2]^2, \end{array} \right.$$

équation d'un cône du quatrième degré.

PROBLÈME III. — *Trouver sur une surface du second degré le lieu des points qui ont des indicatrices semblables* (*), c'est-à-dire *tels, que des plans parallèles aux plans tangents menés à la surface en ces points coupent la surface suivant des coniques semblables.*

Ce lieu est évidemment donné, pour les surfaces à centre, par l'intersection des surfaces (1) et (5). En ayant égard à l'équation (1), l'équation (5) peut être remplacée par la suivante :

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} ABC\lambda^2(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) \\ = [A^2(B+C)x^2 + B^2(A+C)y^2 + C^2(A+B)z^2]^2. \end{array} \right.$$

Posons

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad C = \frac{1}{c^2}.$$

La quantité placée entre crochets dans l'équation (6)

(*) J'appelle ce lieu *ligne des courbures semblables*, parce que, pour deux points de cette ligne, les courbures de deux sections normales semblablement placées par rapport aux sections principales présentent un rapport constant.

pourra s'écrire

$$\frac{1}{a^2 b^2 c^2}\left[(b^2+c^2)\frac{x^2}{a^2}+(a^2+c^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2+b^2)\frac{z^2}{c^2}\right]$$

$$=\frac{1}{a^2 b^2 c^2}\left[(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-x^2-y^2-z^2\right],$$

$$=\frac{1}{a^2 b^2 c^2}(a^2+b^2+c^2-x^2-y^2-z^2),$$

en ayant égard à l'équation de l'ellipsoïde

$$(7)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

L'équation (6) prendra donc la forme

$$(8)\qquad a^2 b^2 c^2 \lambda^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)=(a^2+b^2+c^2-x^2-y^2-z^2)^2,$$

et la ligne des courbures semblables de l'ellipsoïde sera représentée par l'ensemble des équations (7) et (8). Quand $\lambda=2$, l'équation (8) représente une surface qui touche l'ellipsoïde aux quatre ombilics.

Je n'examinerai pas les cas particuliers des hyperboloïdes et des paraboloïdes, qui ne peuvent présenter de difficultés après ce qu'on vient de dire. Je remarquerai seulement que le problème III comprend, comme cas particulier, les questions 638 et 639; car demander que les génératrices rectilignes d'une surface du second degré, qui passent par un point de la surface, fassent un angle donné, c'est demander que les sections faites parallèlement au plan tangent mené par ce point soient des hyperboles semblables à des hyperboles données. On voit par là qu'une question qui semblait ne concerner que les surfaces du second degré à génératrices rectilignes s'applique à toutes les surfaces de ce degré, quand on se place à un point de vue plus général. P.

BIBLIOGRAPHIE.

Introduction a la théorie des nombres; par *V.-A. Le Besgue*, correspondant de l'Institut (Académie des Sciences), professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux, chevalier de la Légion d'honneur. Grand in-8 sur grand raisin fin; *Paris*, Mallet-Bachelier. 1862. — Prix : 4 francs.

Cet ouvrage, distinct des *Exercices d'analyse numérique* du même auteur, renferme les notions nécessaires pour l'intelligence des Mémoires que M. Le Besgue se propose de publier sur les diverses parties de la théorie des nombres. Dans les six premiers chapitres (p. 1 à 83), qui se rapportent à des propositions bien connues, les démonstrations ne sont qu'indiquées ou présentées sommairement. Les théorèmes relatifs aux combinaisons, aux diviseurs des nombres, à la recherche des nombres premiers, aux congruences, sont donnés avec de nombreux corollaires destinés à éviter, par la suite, quelques digressions qui auraient rompu l'enchaînement naturel des propositions.

Le VIIe chapitre (p. 84 à 104), plus développé, est consacré à l'importante théorie des résidus des puissances, théorie fondée par Euler, et qui est la base des travaux de Gauss sur la résolution des équations binômes. On sait que les restes des termes de la progression indéfinie

$$g,\quad g^2,\quad g^3,\ldots,$$

divisés par un nombre premier P, forment une suite périodique dont la période comprend au plus P — 1 termes. Si la période de g comprend P — 1 termes, auquel cas

on dit que g appartient à l'exposant P — 1, le nombre g donne, par les restes de ses diverses puissances, tous les nombres inférieurs à P; en sorte que a étant un nombre inférieur à P, on peut toujours satisfaire à la congruence

$$g^{\alpha} \equiv a \quad (\text{mod. } P).$$

L'exposant α est ce que Gauss nomme l'indice de a, et M. Le Besgue le logarithme modulaire de a, à cause d'une analogie évidente avec les logarithmes ordinaires. Jacobi a donné une table, le *Canon arithmeticus*, destinée à faire connaître les indices de tous les nombres premiers inférieurs à 1000. M. Le Besgue indique les moyens de simplifier les tables de Jacobi, ce qui permet de leur donner une plus grande étendue sous le même volume.

Les frais d'impression de cette Introduction ont été avancés par M. le prince de Polignac. On doit vivement désirer que les Mémoires annoncés par M. Le Besgue puissent bientôt voir le jour. La Théorie des nombres de Legendre est devenue rare et n'est plus d'ailleurs à la hauteur de la science. P.

CARL-FRIEDRICH GAUSS WERKE. *OEuvres de* C.-F. GAUSS, publiées par l'Académie des Sciences de Gœttingue; 6 vol. in-4, de 50 à 60 feuilles. — Prix de chaque volume : 6 thalers (*).

Le Ier volume de cette importante collection vient de paraître. Il renferme les *Disquisitiones arithmeticæ*, avec les corrections et les additions de l'auteur.

Les volumes suivants comprendront :

II. Les Mémoires sur l'arithmétique supérieure et en particulier la huitième section des *Disquisitiones*;

(*) Le thaler vaut $3^{fr},71$.

III. Les travaux d'analyse;

IV. Mémoires de géométrie et théorie des moindres carrés;

V. Physique mathématique;

VI. Astronomie (moins la *Theoria motus corporum cœlestium*), dont l'édition n'est pas encore épuisée et qui formera plus tard le VIIe volume des Œuvres complètes.

Nous reviendrons sur cette publication.

GIORNALE DI MATEMATICHE AD USO DEGLI STUDENTI DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE, pubblicato per cura dei professori *G. Battaglini, V. Janni* et *N. Trudi*. Ier numéro, janvier 1863. — Prix de l'abonnement : 14 francs pour l'Italie.

Ce journal, qui compte parmi ses collaborateurs MM. Avena, Brioschi, Casorati, Cremona, Dorna, Fergola, de Gasparis, del Grosso, Padula, Rubini, Sabato, Sannia, est publié à Naples, chaque mois, par livraison de 32 pages grand in-8. Le but des éditeurs est de venir en aide à la jeunesse italienne, en lui faisant connaître les travaux récents des géomètres, dispersés dans de nombreuses publications, la plupart écrites dans des langues étrangères, et qu'il est très-difficile de réunir. Le fonds du recueil se composera d'articles dans lesquels seront développées les méthodes modernes. On y joindra des notes sur des questions spéciales, les solutions de problèmes proposés par la rédaction et des articles de bibliographie ou d'histoire. Enfin, et c'est là un signe du temps, on promet un dictionnaire *des termes nouveaux* avec leur explication. M. Hoüel s'est élevé avec raison contre la multiplicité des langues, qui rend si difficiles les communications entre géomètres : mais le mal est bien plus grand qu'il ne pense. Si l'on n'y prend garde, nous ver-

rons bientôt l'époque où chaque auteur, se faisant une langue à lui, ne pourra être lu, compris et admiré que par lui-même (*).

Le premier numéro du journal napolitain est un excellent spécimen, propre à montrer ce que l'on doit attendre du zèle et du talent de ses auteurs. En voici le sommaire :

Théorie élémentaire des formes géométriques, par *G. Battaglini.* — Théorie géométrique des courbes du deuxième ordre, par *V. Janni.* — Exposition de divers systèmes de coordonnées homogènes, par *N. Trudi.*—Sur une transformation des formes quadratiques, par *F. Brioschi.* — Démonstration d'un théorème du capitaine Faure (*Nouvelles Annales*, t. XX, p. 141), par *E. d'Ovidio.* — Sur quelques propriétés du cercle des neuf points, par *N. Trudi.* (Le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit et aux cercles exinscrits : théorème de Steiner) (**). P.

ERRATUM (p. 23).

Les formules de la question 633 sont fausses. En revoyant nos calculs, nous y avons découvert une faute de signe d'autant plus perfide, qu'elle conduisait à des résultats fort vraisemblables. Nous regrettons et le temps que nous avons perdu à cette question et celui que nous avons fait perdre à quelques-uns de nos lecteurs. P.

(*) On peut juger, par la *Géométrie* de Descartes, que des idées nouvelles ne demandent pas nécessairement des termes nouveaux. Dans ce *mince* écrit de 120 pages, on ne voit paraître aucun mot qui ne fût déjà, à cette époque (1637), dans le vocabulaire des mathématiques.

(**) Jacob Steiner, né à Utzendorf le 18 mars 1796, mort à Berne le 1er avril 1863; un des grands géomètres de notre époque.

RAPPORT SUR LES TRAVAUX MATHÉMATIQUES DE M. O. TERQUEM;

PAR M. CHASLES.

Lu devant le Conseil de la Société de secours des Amis des Sciences.

M. Terquem (Olry), né en 1782, entra à l'École Polytechnique en 1801 à l'âge de dix-neuf ans. À sa sortie de l'École, en 1804, il fut nommé professeur de mathématiques au lycée de Mayence; et sept ans après il passa au même titre à l'école d'artillerie de cette ville. En 1814, la place de bibliothécaire du Dépôt central de l'Artillerie devenait vacante par la retraite du savant géomètre Servois. Les officiers généraux que les guerres de l'époque avaient appelés à Mayence, ayant apprécié tout le mérite et les qualités du jeune professeur de l'école d'artillerie, le signalèrent comme éminemment propre à remplacer Servois. Il ne s'agissait pas, en effet, simplement de présider à la conservation d'une bibliothèque : il s'agissait surtout de prendre part d'une manière active à toutes les questions scientifiques afférentes au Comité de l'Artillerie. C'est sous cette condition que M. Terquem obtint la préférence sur tous les autres professeurs aux écoles d'artillerie, et fut investi des fonctions importantes qui le fixèrent à Paris.

Ces fonctions, M. Terquem les remplit pendant quarante-huit ans, sans que l'Administration ait jamais voulu appliquer à son égard les prescriptions réglementaires qui obligeaient de mettre à la retraite les autres professeurs aux écoles d'artillerie, à l'âge de soixante ans.

On le conçoit bien; car les rares facultés de M. Terquem

lui permettaient de s'associer à tous les travaux du Comité, de traiter une foule de questions renvoyées à son examen, et de rendre ainsi de grands services qu'on n'aurait pu attendre de tout autre fonctionnaire. Par cette coopération continuelle et par l'aménité de son caractère, M. Terquem s'est acquis, pendant un demi-siècle, l'estime et la haute considération des officiers les plus éminents du corps, dont il eut le rare privilége de voir trois générations se succéder.

Il possédait une érudition immense, que rehaussait la connaissance de toutes les langues vivantes et anciennes. Il joignait à tant de savoir une modestie rare et une obligeance inépuisable : aussi ce n'est pas seulement au Corps de l'Artillerie qu'il a rendu de continuels services, c'est à une foule de professeurs, à tous les savants qui ont eu recours à ses lumières.

Mais nous devons entretenir le Conseil des travaux personnels qui marquent la place de M. Terquem dans la grande famille des hommes dont l'existence est consacrée au culte des sciences.

Une de ses premières publications, bien qu'elle soit une simple traduction de l'anglais, mérite d'être citée, à raison de l'importance du sujet ; car elle renfermait les révélations les plus inattendues sur la culture des mathématiques chez les Indiens. Il s'agit, en effet, de *Traités d'Algèbre* que des savants anglais rapportaient de Calcutta.

On connaissait déjà, par la publication des *Recherches asiatiques* de la Société du Bengale, des fragments de Traités d'Astronomie en langue sanscrite, réputés d'une très-haute antiquité.

Quelque intérêt que présentassent ces premières découvertes, elles ne suffisaient pas pour dévoiler une origine vraiment scientifique ; car les peuples les plus anciens

ont eu des notions astronomiques fondées sur l'observation des phénomènes célestes, et qui n'exigeaient point nécessairement des connaissances théoriques bien avancées. L'existence de quelques Traités astronomiques ne pouvait donc nullement autoriser à penser que les Hindous s'étaient occupés des *Mathématiques abstraites*, qu'ils avaient connu l'*Algèbre* et traité cette science d'une manière originale et avec une supériorité incontestable sur les méthodes grecques qui nous sont connues. C'est cependant ce qui avait eu lieu. On le voit par les fragments empruntés, sous les titres de *Lilavati* et de *Bija Ganita*, des ouvrages sanscrits d'un géomètre et astronome hindou très-célèbre, nommé Brahmegupta.

Ce sont ces documents précieux que M. Terquem a fait connaître le premier en France, par une traduction qui parut dans le tome III de la *Correspondance de l'École Polytechnique*, en janvier 1816.

Quelques années après, M. Delambre, dans son *Histoire de l'Astronomie du moyen âge*, reproduisit ces documents historiques. Plusieurs savants, depuis, l'ont suivi dans ces explorations de l'antiquité, qui plus tard se sont étendues des mathématiques aux connaissances philosophiques et littéraires des Hindous. On s'est accordé à reconnaître dans toutes ces parties du savoir humain un cachet d'originalité et un mérite réel, que faisaient prévoir les fragments d'algèbre dont nous venons de parler.

On peut donc dire, à l'éloge de M. Terquem, que c'est lui qui a ouvert en France, dès 1816, ce champ de recherches qui répandaient un jour nouveau sur les mystères de l'ancienne civilisation de l'Orient, et qui ont pris une très-grande importance dans les travaux des érudits, en Allemagne, comme en France et en Angleterre.

Quoique de telles recherches eussent beaucoup d'at-

trait pour M. Terquem, doué d'une érudition vraiment encyclopédique, c'est à la culture des mathématiques qu'il s'est livré de préférence, autant que le lui permettaient ses fonctions, devenues très-multiples, au Comité de l'Artillerie, par le plus généreux zèle pour tout ce qui était utile.

Mais ces fonctions, disons-le brièvement, donnèrent lieu à M. Terquem de ne point rester étranger aux matières traitées dans le *Mémorial de l'Artillerie*. Nous citerons, dans ce recueil, un travail *sur quelques expériences chimiques faites en Allemagne sur la poudre à canon* (t. II, année 1828).

Deux ans auparavant, M. Terquem avait donné une traduction de l'ouvrage anglais de Hutton sur l'artillerie (in-4, 1826).

Plus tard, il publia, en collaboration avec notre savant collègue M. le colonel Favé, un ouvrage intitulé : *Expériences sur les Schrapnels, faites chez la plupart des puissances de l'Europe*, ouvrage traduit de l'allemand et considérablement augmenté par O. Terquem et Favé. Paris, 1847; in-8.

M. Liouville ayant fondé en 1836 un *Journal de Mathématiques*, que les géomètres appelaient de leurs vœux et qui a rendu et continue de rendre de grands services, M. Terquem a fait paraître dans les cinq premiers volumes (de 1836 à 1841) plusieurs Notes et Mémoires (au nombre de onze).

Sa dernière communication est intitulée : *Notice sur un manuscrit hébreu d'Arithmétique d'Ibn-Esra, conservé à la Bibliothèque nationale.*

Cette Notice fort étendue fait connaître un Traité d'Arithmétique du célèbre auteur juif du XIIIe siècle, Ibn-Esra, ouvrage cité dans les bibliographies mathématiques,

mais qui restait en quelque sorte lettre close, étant écrit en langue hébraïque. C'est à la demande de savants, dans un moment où se traitaient certaines questions d'histoire scientifique, que M. Terquem a consenti à se livrer à ce travail pénible, que seul peut-être il était capable d'accomplir, puisqu'il demandait des connaissances de deux ordres différents, que l'on trouve rarement réunies chez un seul homme.

Si ce fut là, comme nous venons de le dire, la dernière communication de M. Terquem insérée dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, c'est que lui-même entreprenait, peu de temps après (en 1842), de concert avec un professeur renommé, M. Gerono, une publication mensuelle, sous le titre de *Nouvelles Annales de Mathématiques :* titre imité des *Annales de Mathématiques* publiées (de 1810 à 1830) par M. Gergonne à Montpellier.

Ces *Nouvelles Annales*, dans le modeste format de l'in-octavo et d'un prix modéré, étaient destinées surtout aux professeurs et aux nombreux candidats aux Écoles du Gouvernement : Écoles Normale, Polytechnique, Militaire, de Marine, etc.

M. Terquem, en excitant les jeunes géomètres à des recherches sur des questions proposées, en accueillant leurs essais, en les tenant au courant des faits nouveaux de la science, tant par cette publication que par ses communications individuelles, rendait un grand service aux études mathématiques.

Car, on ne peut se le dissimuler; pour étudier avec fruit les mathématiques, pour se rendre capable d'en faire, dans le domaine de la science comme dans les services publics, les applications qui leur sont propres, l'intelligence des livres, même les mieux faits, ne suffit pas : il est indispensable de se livrer journellement, comme

dans les études littéraires, à des exercices écrits, qui sont la mise en œuvre des connaissances déjà acquises. Autrement ce n'est que la mémoire des jeunes gens qui s'exerce, sans que leur intelligence se fortifie, sans qu'ils acquièrent la faculté de travailler sérieusement. Il faut donc nécessairement résoudre, comme on dit, des problèmes, et en rédiger la solution dans les formes rigoureuses du raisonnement mathématique. C'est à ce travail, sans lequel il n'y a point de fortes études, mais seulement une impression passagère d'un savoir fugitif, que provoque l'utile publication de M. Terquem.

De pareils journaux de mathématiques, d'un ordre secondaire au point de vue de l'importance scientifique des matières qu'on y traite, ont toujours existé, en Angleterre surtout, à côté des recueils destinés aux plus savantes productions, tels que le *Journal* de M. Liouville.

M. Terquem, voulant donner aux *Nouvelles Annales* un degré de plus d'utilité, y joignait depuis quelques années un *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques*, dans lequel il faisait connaître, par des analyses fidèles, d'anciens ouvrages mathématiques, aujourd'hui très-rares, très-peu lus, quoique dus à des géomètres dont le nom restera célèbre dans l'histoire de la science. Cette publication a, comme la partie principale des *Nouvelles Annales*, une utilité réelle.

Nous passerons sous silence divers Mémoires de M. Terquem, insérés dans son journal. Mais nous devons signaler au Conseil un travail considérable, qui a demandé à l'auteur plusieurs années, et qu'il destinait à l'impression. Malheureusement un éditeur est difficile à trouver pour les œuvres mathématiques, qui ne s'adressent qu'à une classe très-restreinte de lecteurs. Or, telle était l'œuvre de M. Terquem; car il n'entreprenait rien moins qu'un commentaire de la *Mécanique céleste* de Laplace. Le titre

que l'auteur donnait à ce travail en fait connaître complétement l'objet :

Commentaire perpétuel sur le Traité de Mécanique céleste *de Laplace, où tous les calculs sont effectués, et où l'on s'est proposé d'expliquer tous les passages difficiles et d'éclaircir les théories générales par des explications particulières ou numériques. On y a joint des Notices bibliographiques, l'historique ou l'analyse des principaux ouvrages et Mémoires publiés sur la Mécanique rationnelle jusqu'à ce jour.* Par O. Terquem.

Le grand ouvrage de Newton, le *Livre des Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, auquel fait suite la *Mécanique céleste* de Laplace, a été commenté par deux savants jésuites, les Pères Leseur et Jacquier. Ce commentaire a puissamment facilité la lecture de l'œuvre immortelle de Newton, qui devait fixer la direction des grands travaux mathématiques du siècle dernier. C'est un commentaire semblable, à l'égard de l'ouvrage de Laplace, que M. Terquem a entrepris.

Le manuscrit se compose de seize cahiers in-4°.

Les cinq premiers cahiers (350 pages) se rapportent au Ier livre de la *Mécanique céleste*;

Les cinq cahiers suivants (6 à 10), de 790 pages, au IIe livre;

Puis quatre cahiers (11 à 14), formant 234 pages, au IIIe livre;

Enfin les deux derniers cahiers (15 et 16), de 47 pages, au VIe livre.

Ce manuscrit, trouvé par la famille de M. Terquem dans ses papiers, a été offert par ses fils à l'Académie des Sciences, qui le conserve. C'est ainsi que nous en avons eu connaissance.

On ne peut douter que ce commentaire n'eût été extrêmement utile; car l'ouvrage de Laplace est écrit avec une

grande concision, et exige que l'on soit familiarisé avec les théories les plus relevées et toutes les ressources de l'analyse.

Ce travail de M. Terquem suffirait seul pour attester que son savoir mathématique égalait en étendue son érudition si variée.

Il présente donc amplement les conditions que le Conseil peut désirer pour prendre en considération très-sérieuse la demande qui lui est adressée par la veuve du savant honorable sur la tombe de qui M. le général de division de Bressolles, au nom du Comité de l'Artillerie, a prononcé ces paroles : « Cher Terquem, avant de te dire » un suprême adieu, laisse-moi m'abandonner à l'élan » de mon cœur, et répéter bien haut que tu fus le meil- » leur des hommes! »

Toutes les générations de professeurs, d'ingénieurs militaires et d'ingénieurs des services publics ont connu M. Terquem, et applaudiront unanimement à l'intérêt que la Société portera à la respectable compagne qui lui survit. Oserons-nous dire qu'on douterait du but réel de la Société, si quelque entrave venait contrarier les dispositions généreuses du Conseil ?

Quoique nous n'ayons à vous entretenir, Messieurs, que des travaux mathématiques de M. Terquem, veuillez nous permettre d'indiquer une considération de nature à vous toucher vivement.

M. Terquem, qui n'a jamais eu qu'un traitement fort restreint, a vécu avec tant d'ordre et d'économie, qu'il est parvenu à établir cinq enfants, dont trois fils : l'un, professeur d'hydrographie, en résidence à Dunkerque; le deuxième, capitaine-commandant d'artillerie, décoré dans la campagne d'Italie; le troisième, sorti depuis peu de l'École Polytechnique, et encore élève sous-lieutenant d'artillerie à l'École d'application de Metz. Ces posi-

tions honorables des trois fils de M. Terquem, celles aussi de leurs deux sœurs, procurent une bien douce consolation à madame Terquem. Mais le Conseil ne s'étonnera point qu'après les sacrifices qu'a demandés l'éducation d'une aussi intéressante famille, cette digne et respectable dame reste sans autre ressource que la modique pension assurée aux veuves des serviteurs de l'État.

M. Terquem avait un cœur bienfaisant et généreux auquel l'infortune ne s'adressait jamais en vain. Aussi fut-il des premiers à applaudir à la noble inspiration de M. Thenard et à la seconder de ses souscriptions continues.

Il a travaillé toute sa vie avec une ardeur incroyable et une intelligence privilégiée. Ses facultés ne lui ont jamais fait défaut jusqu'au dernier jour.

Le Conseil veut-il me permettre, en terminant, d'en apporter une preuve qui m'est personnelle? La dernière lettre qu'il ait écrite m'est adressée; elle porte la date du 25 avril, dix jours avant sa mort. Il s'occupait avec passion depuis quelque temps des questions de géométrie auxquelles a donné lieu la forme des alvéoles des abeilles. Il me demandait de lui communiquer l'ouvrage de Borelli *De Motu animalium*, qu'il savait être dans ma bibliothèque. Je le cherchais en vain. Je lui envoyais d'autres ouvrages, mais qui ne pouvaient le contenter. J'étais désolé de ne pas satisfaire la vivacité de ses désirs; enfin, je trouvai le volume et m'empressai de le lui transmettre. Cet ouvrage ne renferme que des démonstrations géométriques, à l'aide de figures difficiles à suivre; étude pénible, rebutante même, et à laquelle nous ne sommes plus guère accoutumés dans l'état actuel de la science, dont les méthodes reposent sur des considérations générales formulées d'une façon plus abstraite, empruntée des principes mêmes de l'algèbre. Mais ces difficultés réelles, et souvent presque insurmontables, n'existaient point pour l'esprit

tenace et pénétrant de M. Terquem; et deux jours après avoir reçu le volume, il m'écrivait ce qui suit :

« Vous m'avez appris à supporter avec patience les » jours qu'il me reste encore à passer ici. L'ouvrage de » Borelli est un petit chef-d'œuvre *qui me procure des* » *heures délicieuses :* on voit l'avantage qu'il y a aux » anatomistes d'être géomètres. Il est à désirer qu'on » fasse sur le même plan une nouvelle édition de l'*Ana-* » *tomie descriptive* de Richerand; ce serait une excel- » lente acquisition. Malheureusement nos anatomistes » sont peu géomètres, et nos médecins de faibles chi- » mistes. Dieu, qui améliore tout, amènera quelque per- » fection dans ces sciences. Je crois que l'intelligence » humaine approche asymptotiquement de l'intelligence » divine. Espérons.

» Je rendrai compte de cet ouvrage dans mon *Bul-* » *letin*....

» *Tibi addictissimus*,

» O. TERQUEM. »

Le 62/4/25.
(C.-à-d., Le 25 avril 1862.)

Note du Rédacteur. — Dans l'article consacré à M. Terquem (voir *Bulletin*, t. VIII, p. 81), nous avons cherché à faire connaître l'homme plutôt que le savant. C'est pourquoi nous ne sommes pas entré dans de grands détails sur ses travaux scientifiques. Ce n'est pas que cette dernière partie de notre tâche nous parût moins importante, mais nous savions qu'une voix plus autorisée devait apprécier Terquem comme mathématicien, et nous préférions laisser sur ce point la parole à un juge compétent, à un éminent géomètre. Aujourd'hui M. Chasles, avec une bonne grâce à laquelle il nous a habitué, et dont nous ne saurions trop le remercier, a bien voulu nous

autoriser à publier le Rapport précédent, qu'il a lu devant le Conseil de la *Société de secours des Amis des Sciences*, Rapport dont la conséquence immédiate a été le vote d'une pension annuelle de *douze cents francs* en faveur de madame veuve Terquem. L'intéressant article de M. Chasles fera mieux connaître l'homme dont la vie entière n'a été qu'un long dévouement à la science, en même temps qu'il appellera l'attention de nos lecteurs sur une institution philanthropique qu'on ne saurait trop encourager. La Société de secours des Amis des Sciences, née d'une généreuse inspiration du baron Thenard, a déjà fait beaucoup de bien; elle en fera davantage si l'appel chaleureux et éloquent de son secrétaire général est entendu. « *Dix-sept mille francs*, dit M. Boudet en terminant son Rapport annuel, voilà, si nous n'accomplissons de nouveaux et rapides progrès, le chiffre de nos ressources disponibles. Qu'est-ce donc que cette faible somme? Ce n'est pas une liste de deux mille souscripteurs, ce n'est pas un capital de *deux cent mille francs* qui doivent représenter la sympathie de la France pour les sciences qui ont fait sa gloire, et qui portent en elles tant d'espérances pour l'avenir! Au-dessus de la foule des amis des sciences qui peuvent fournir leur modeste tribut, combien n'est-il pas d'hommes assez riches pour être généreux, qui pourraient, qui devraient, imitant l'exemple donné tout à l'heure par le Crédit Mobilier et par l'un de nos vice-secrétaires, M. Legrand, apporter leurs offrandes sur l'autel de la Science, ou lui léguer quelques parcelles de leur héritage! » (Séance publique du 16 avril 1863.)

La seule condition pour faire partie de la Société est de se faire présenter par un de ses membres (*). La cotisation annuelle est de *dix francs*. P.

(*) Nous nous chargerons volontiers de transmettre la demande de ceux de nos abonnés qui désireront entrer dans cette association. P.

MÉMOIRE SUR LA SURFACE DES ONDES (suite)

(voir page 198);

PAR M. DURRANDE,
Professeur au lycée de Moulins.

IV.

D'une surface auxiliaire nommée SURFACE D'ÉLASTICITÉ.

Si du centre de l'ellipsoïde nous abaissons une perpendiculaire sur le plan tangent au point A, le pied P de cette perpendiculaire devra se trouver sur la tangente AT' perpendiculaire à AT. Dans le mouvement du plan tangent autour de OB, la droite OP, qui est perpendiculaire à OB, suit le mouvement du plan, et sa nouvelle position OP_1, après le mouvement de 90°, est perpendiculaire au plan tangent à la surface des ondes au point A_1. Cette droite OP_1 est perpendiculaire à OP et parallèle à AP, et A_1P_1 est parallèle à OP.

Donc :

Tous les plans tangents à la surface des ondes sont à des distances du centre respectivement égales aux distances des plans correspondants tangents à l'ellipsoïde.

De plus, si l'on remarque que la droite OB, autour de laquelle on fait tourner le plan tangent à l'ellipsoïde au point A, pour obtenir le plan tangent correspondant à la surface des ondes, est perpendiculaire au plan POA, on en conclura sans peine que ce triangle OPA, rectangle en P, tourne lui-même de 90° dans son plan autour de son sommet.

Puisque nous avons besoin de considérer les perpendiculaires OP sur les plans tangents à l'ellipsoïde, il est as-

sez naturel de s'occuper de la surface dont ces perpendiculaires sont les rayons vecteurs. Cette surface est connue sous le nom de *surface d'élasticité*, et sa considération ne sera pas inutile pour l'étude qui nous occupe.

Proposons-nous de trouver l'équation de cette surface.

Soient (ξ, η, ζ) les coordonnées du pied P de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, et (x', y', z') les coordonnées du point de contact de ce plan avec l'ellipsoïde; on a entre ces quantités les relations suivantes :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{z'z}{c^2}=1,\\ &\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1,\\ &\xi=\frac{\dfrac{x'}{a^2}}{\dfrac{x'^2}{a^4}+\dfrac{y'^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}},\\ &\eta=\frac{\dfrac{y'}{b^2}}{\dfrac{x'^2}{a^4}+\dfrac{y'^2}{b^4}+\dfrac{z'^2}{b^4}},\\ &\zeta=\frac{\dfrac{z'}{c^2}}{\dfrac{x'^2}{a^4}+\dfrac{y'^2}{b^4}+\dfrac{z'^2}{c^4}}. \end{aligned}\right.$$

On en déduit facilement

$$a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2=\frac{1}{\left[\dfrac{x'^2}{a^4}+\dfrac{y'^2}{b^2}+\dfrac{z'^2}{c^4}\right]^2}$$

et

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{1}{\dfrac{x'^2}{a^4}+\dfrac{y'^2}{b^4}+\dfrac{z'^2}{c^4}};$$

d'où enfin

$$(18)\qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2.$$

C'est l'équation de la surface d'élasticité.

Si le point A de l'ellipsoïde reste à une distance constante du centre, c'est-à-dire si l'on a

$$x'^2+y'^2+z'^2=\mathrm{R}^2,$$

l'axe OA décrit le cône

$$(19)\quad (a^2-\mathrm{R}^2)\frac{x'^2}{a^2}+(b^2-\mathrm{R}^2)\frac{y'^2}{b^2}+(c^2-\mathrm{R}^2)\frac{z'^2}{c^2}=0,$$

et, si l'on tient compte des relations (17), on voit que la perpendiculaire OP décrit le cône

$$(20)\quad (a^2-\mathrm{R}^2)a^2\xi^2+(b^2-\mathrm{R}^2)b^2\eta^2+(c^2-\mathrm{R}^2)c^2\zeta^2=0.$$

Si c'est le point P que l'on assujettit à rester sur une sphère

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\mathrm{R}^2,$$

la droite OP décrit le cône

$$(21)\qquad (a^2-\mathrm{R}^2)\xi^2+(b^2-\mathrm{R}^2)\eta^2+(c^2-\mathrm{R}^2)\zeta^2,$$

et la droite OA se meut sur le cône

$$(22)\quad (a^2-\mathrm{R}^2)\frac{x'^2}{a^4}+(b^2-\mathrm{R}^2)\frac{y'^2}{b^4}+(c^2-\mathrm{R}^2)\frac{z'^2}{c^4}=0,$$

et en remarquant que la droite OP_1 est parallèle à AP et égale à OP, on trouve facilement qu'elle décrit le cône supplémentaire du cône (21), c'est-à-dire

$$(23)\qquad \frac{\xi'^2}{a^2-\mathrm{R}^2}+\frac{\eta'^2}{b^2-\mathrm{R}^2}+\frac{\zeta'^2}{c^2-\mathrm{R}^2}=0,$$

dont nous aurons occasion de nous servir par la suite.

V.

Démonstration de deux propriétés remarquables de la surface des ondes.

Nous nous proposons d'étudier la forme de la surface des ondes autour des points singuliers. Je vais démontrer : 1° *qu'en chacun des points singuliers il existe une infinité de plans tangents ayant pour enveloppe un cône du second degré;* 2° *et de plus qu'à chaque point singulier correspond un plan tangent singulier ayant avec la surface une infinité de points de contact, tous situés sur un même cercle.*

La démonstration de ces deux propriétés est des plus simples quand on s'appuie sur ces deux théorèmes de M. Chasles :

Étant donnés deux plans fixes, si un point de leur intersection commune est pris pour le sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés se meuvent dans les deux plans fixes respectivement,

1° *Le plan de cet angle droit enveloppera un cône du second degré;*

2° *Les lignes focales de ce cône seront respectivement perpendiculaires aux deux plans fixes.*

Il est aisé de conclure de là :

1° *Que la normale au plan de l'angle droit, menée par son sommet, décrit un cône supplémentaire du premier;*

2° *Que le plan des sections circulaires de ce cône sont respectivement parallèles aux deux plans fixes.*

I. *Propriétés des points singuliers de la surface des ondes.* — Les cônes (19) et (20), quand on fait $R = b$,

deviennent deux plans

$$(24)\quad \begin{cases} x' = \pm \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}\cdot z', \\ \xi = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}\cdot \zeta. \end{cases}$$

Les plans contenus dans la première des équations (24) sont les plans des sections circulaires de l'ellipsoïde; les plans contenus dans la seconde sont deux sections planes de la surface d'élasticité. Si l'on considère l'une des sections circulaires et la section correspondante de la surface d'élasticité, l'une est le lieu des demi-axes $OA = b$, l'autre le lieu des droites OP correspondantes. Tous les plans tangents à l'ellipsoïde aux divers points de la section circulaire viennent évidemment tous passer, après leur relèvement, par l'extrémité de la normale à cette section circulaire, c'est-à-dire sont tous tangents en l'un des points singuliers de la surface des ondes. Or, des deux tangentes rectangulaires qui déterminent la position d'un de ces plans, l'une, perpendiculaire à la normale, est parallèle au plan de la section circulaire, l'autre, constamment parallèle à OP, est dans un plan parallèle au plan lieu de OP. Donc, en vertu du théorème de M. Chasles, ces divers plans tangents enveloppent un cône du second degré.

II. *Propriété des plans tangents singuliers.* — Faisons $R = b$ dans les deux cônes (21) et (22), on aura

$$(25)\quad \begin{cases} \xi = \pm \zeta\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}, \\ x' = \pm \frac{a^2}{c^2} z'\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}. \end{cases}$$

Les deux plans contenus dans la première des équa-

tions (25) sont les sections circulaires de la surface d'élasticité; les deux plans contenus dans la seconde sont deux sections elliptiques. Considérons comme précédemment l'une des sections de l'ellipsoïde et la section circulaire de la surface d'élasticité. Les plans tangents aux divers points de la section elliptique sont tous perpendiculaires au plan de la section circulaire lieu de OP; le plan POA est aussi perpendiculaire au plan de cette section, et la droite OB, autour de laquelle on doit faire tourner le plan tangent au point A, est dans le plan de cette section circulaire; donc le plan AOB enveloppe un cône du second degré, par suite la normale OA_1 décrit un cône du second degré, dont les plans des sections circulaires sont parallèles au plan lieu de OP et au plan lieu de OA. Ceci prouve que tous les plans tangents à l'ellipsoïde, situés à une distance b du centre, ne donnent qu'un seul plan tangent à la surface des ondes; mais le lieu des points de contact A_1 est un cercle, car la droite P_1A_1 étant parallèle à OP, le lieu des points A_1 est une des sections circulaires.

Ainsi, *aux quatre points singuliers coniques de la surface des ondes correspondent quatre plans tangents qui la touchent suivant des cercles.*

VI.

Propriétés polaires de la surface des ondes.

On sait que le pôle d'un plan

$$mx + ny + pz = 1,$$

par rapport à une surface du second ordre

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1,$$

est le point dont les coordonnées (x_1, y_1, z_1) permettent

d'écrire l'équation du plan sous la forme

$$\alpha x_1 x + \beta y_1 y + \gamma z_1 z = 1;$$

de sorte qu'entre les coordonnées du point et les coefficients du plan on a les relations

$$m = \alpha x_1, \quad n = \beta y_1, \quad p = \gamma z_1,$$

et le plan se nomme le *plan polaire du point* (x_1, y_1, z_1).

On sait également que, si le point (x_1, y_1, z_1) décrit une certaine surface S, le plan enveloppe une autre surface S', et le plan tangent au point (x_1, y_1, z_1) de la surface S a précisément pour pôle le point de contact du plan tangent polaire du point (x_1, y_1, z_1) avec la surface S'. Aussi les deux surfaces S et S' sont-elles nommées *surfaces polaires réciproques,* par rapport à la surface du second degré donnée.

Ceci posé, je vais démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *La surface polaire réciproque de l'une des nappes de la surface des ondes, relativement à l'ellipsoïde*

(26) $$\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} + \frac{z^2}{ab} = 1,$$

est la seconde nappe de la même surface des ondes, a, b, c ayant la même signification que précédemment.

La marche qu'il serait naturel de suivre, pour démontrer ce théorème, consisterait à prendre l'équation du plan tangent de la surface des ondes, à déterminer le pôle de ce plan par rapport à l'ellipsoïde (26) et à chercher le lieu de ces pôles en tenant compte de la condition que le plan polaire touche la surface des ondes. Mais les calculs qui se rapportent à cette marche sont très-longs, et j'ai tourné la difficulté de la manière suivante :

Parmi tous les plans tangents à la surface des ondes, il

y en a qui touchent une même sphère dont le rayon R est compris entre *a et c*. Ce sont tous les plans tangents qui sont à une même distance R du centre. Les points de contact de ces plans tangents et de cette sphère sont sur la conique sphérique

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi^2+\eta^2+\zeta^2=R^2 \\ \dfrac{\xi^2}{a^2-R^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2-R^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2-R^2}=0, \end{array}\right.$$

déterminée par l'intersection de la sphère et du cône lieu des droites OP_1 de longueur constante (*voir* § IV).

Il est clair qu'en donnant à R toutes les valeurs comprises entre a et c, tous les plans tangents aux diverses sphères R ayant leurs points de contact sur les coniques (27) seront tous les plans tangents à la surface des ondes. Nous sommes ainsi ramenés à chercher le lieu des pôles des divers plans tangents à une sphère ayant leurs points de contact sur une courbe donnée.

Tout plan tangent à la sphère R a pour équation

$$\xi'\xi+\eta'\eta+\zeta'\zeta=R^2;$$

le pôle (x_1, y_1, z_1) de ce plan, relativement à l'ellipsoïde (26), est tel, que l'on peut écrire l'équation de ce plan sous la forme

$$\frac{\xi x_1}{bc}+\frac{\eta y_1}{ac}+\frac{\zeta z_1}{ab}=1.$$

Donc, entre les coordonnées du point de contact (ξ', η', ζ') et les coordonnées du pôle, on a les relations

$$\xi'=\frac{R^2x_1}{bc},\quad \eta'=\frac{R^2y_1}{ac},\quad \zeta'=\frac{R^2z_1}{ab};$$

ξ', η', ζ' doivent d'ailleurs satisfaire aux équations (27), pour que le plan tangent à la sphère le soit aussi à la surface des ondes. Donc, si l'on substitue les valeurs de ξ',

η', ζ' en (x_1, y_1, z_1) dans les équations (27), on aura

$$(28)\quad \begin{cases} a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + c^2z_1^2 = \dfrac{a^2b^2c^2}{R^2} = P'^2, \\ \dfrac{x_1^2}{b^2c^2 - P'^2} + \dfrac{y_1^2}{a^2c^2 - P'^2} + \dfrac{z_1^2}{a^2b^2 - P'^2} = 0; \end{cases}$$

et l'on reconnaît facilement dans le groupe (28) les équations d'une conique ellipsoïdale de la surface des ondes. Or, il est encore aisé de voir que cette conique ellipsoïdale est celle qui correspond à la conique sphérique, intersection de la sphère R et de la surface des ondes.

Si R est compris entre a et b, tous les plans tangents qu'on obtient d'après les équations (27) sont tous les plans tangents à la nappe externe, et les équations (28) représentent tous les points de la nappe interne. Si R est compris entre b et c, c'est l'inverse qui a lieu. Donc le théorème est démontré.

La manière même dont nous avons démontré ce théorème remarquable conduit immédiatement aux conclusions suivantes :

1° *Tous les plans tangents communs à la surface des ondes et à une sphère ont leurs pôles sur la conique ellipsoïdale correspondant à la conique sphérique donnée par l'intersection de la surface et de la sphère.*

2° *Tous les plans tangents communs à la surface des ondes et à l'ellipsoïde*

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = P^2$$

ont leurs pôles sur la conique sphérique correspondant à la conique ellipsoïdale, intersection de la surface et de l'ellipsoïde donné.

Et par suite :

3° *Les deux courbes dont se compose la trace de la*

surface sur l'un des plans coordonnés sont polaires réciproques.

Et enfin voici une propriété assez remarquable :

4° *Chaque point singulier de la surface est le pôle du plan tangent singulier correspondant, et chacun des points de la courbe de contact circulaire de celui-ci est le pôle de l'un des plans tangents au point singulier.*

VII.

Propriété des axes optiques.

Les normales aux sections circulaires de l'ellipsoïde portent le nom d'*axes optiques* de la surface ; on sait que ces droites passent par les points singuliers de la surface des ondes.

Si l'on remarque que les rayons vecteurs de la surface des ondes sont perpendiculaires aux sections diamétrales correspondantes de l'ellipsoïde, on en conclut sans peine que les angles qu'un rayon vecteur fait avec les axes optiques sont égaux aux angles que fait la section diamétrale de l'ellipsoïde avec les sections circulaires.

L'équation (5) du § I

$$\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin V \sin V'$$

donne donc le théorème suivant :

Le produit des sinus des angles que fait la direction d'un rayon vecteur de la surface des ondes avec les axes optiques de cette surface est proportionnel à la différence des carrés des inverses des deux rayons vecteurs qui ont cette même direction.

Ce théorème a une grande importance dans la théorie de la double réfraction.

CONDITIONS ANALYTIQUES

Pour que les surfaces engendrées par le mouvement d'une ligne droite soient tangentes tout le long d'une génératrice commune;

Par M. J.-F. CH.

Toute droite dans l'espace a pour équations :

(1) $$x = \alpha z + \beta,$$

(2) $$y = \gamma z + \delta.$$

Lorsque les paramètres α, β, γ, δ sont fonctions d'une même variable V, la droite passe d'une position à l'autre suivant une certaine loi qui dépend de la nature de ces fonctions; et elle engendre une surface dont la forme est la conséquence de cette loi. En laissant donc ces fonctions tout à fait indéterminées, on peut dire que toute surface qui a une ligne droite pour génératrice peut être représentée par le système des équations finies (1) et (2) entre lesquelles on doit éliminer V.

Par suite, on peut prendre pour les équations finies de deux de ces surfaces :

$$x = \alpha z + \beta, \quad y = \gamma z + \delta,$$

α, β, γ, δ sont fonctions de V;

$$x = \lambda z + \mu, \quad y = \nu z + \rho,$$

λ, μ, ν, ρ sont fonctions de W.

Supposons que la génératrice commune soit donnée par $V = v$, $W = w$; et que α, β, γ, δ; λ, μ, ν, ρ aient alors respectivement les valeurs déterminées a, b, c, d,

l, m, n, r; on a évidemment :

$$a = l, \quad b = m, \quad c = n, \quad d = r.$$

Nommons α', β', γ', δ', λ', μ', ν', ρ' les dérivées de α, β, γ, δ par rapport à V et de λ, μ, ν, ρ par rapport à W; et a', b', c', d', l', m', n', r' ce que deviennent ces dérivées quand on y fait respectivement $V = v$, $W = w$. Les quantités a', b', c', d', l', m', n', r' ont, ainsi que a, b, c, d, l, m, n, r, des valeurs déterminées.

Pour que les deux surfaces soient tangentes en un point commun, il faut que, pour ce point, x, y, z et dx, dy, dz soient les mêmes; on doit donc avoir

$$dx = \alpha dz + (\alpha' z + \beta') dV = \lambda dz + (\lambda' z + \mu') dW,$$
$$dy = \gamma dz + (\gamma' z + \delta') dV = \nu dz + (\nu' z + \rho') dW.$$

En faisant $V = v$, $W = w$, pour exprimer que le point considéré est situé sur la génératrice commune, ces équations deviennent :

$$(a' z + b') dV = (l' z + m') dW,$$
$$(c' z + d'] dV = (n' z + r') dW.$$

Donc

(3) $$\frac{a' z + b'}{c' z + d'} = \frac{l' z + m'}{n' z + r'}.$$

Cette équation donne le z du point de tangence, et l'on a pour l'x et l'y de ce point :

$$x = az + b, \quad y = cz + d.$$

L'équation (3) est évidemment de la forme

(4) $$Mz^2 + Nz + P = 0,$$

dans laquelle M, N, P sont des quantités déterminées.

Comme elle est du second degré, elle a deux racines, et ces deux racines sont simultanément réelles ou simultanément imaginaires.

Donc, quand il y a un point de tangence sur la génératrice commune, il y en a deux.

Si maintenant l'on veut qu'il y ait tangence tout le long de cette génératrice, il faut que l'équation (4) soit satisfaite, quel que soit z. Par conséquent les conditions de tangence que l'on cherche sont :

$$(5)\qquad \begin{cases} M = a'n' - c'l' = 0, \\ N = a'r' - c'm' + b'n' - d'l' = 0, \\ P = b'r' - d'm' = 0. \end{cases}$$

Ces conditions sont toujours satisfaites quand les deux surfaces ont sur la génératrice commune trois points de tangence différents ; car alors les ordonnées, de valeurs différentes, de ces trois points, doivent satisfaire à l'équation (4), qui n'est que du second degré ; et cela ne peut avoir lieu qu'autant qu'on a à la fois $M=0$, $N=0$, $P=0$.

De là résulte ce théorème, démontré géométriquement depuis longtemps, que deux surfaces gauches qui ont trois plans tangents communs sur une même droite génératrice sont tangentes tout le long de cette génératrice.

Enfin, lorsque les deux surfaces données ont quelques conditions communes dans le mode de génération, il existe des relations déterminées entre quelques-unes des fonctions α, β, γ, δ et λ, μ, ν, ρ ; une ou plusieurs des quantités M, N, P deviennent nulles d'elles-mêmes, et alors, au lieu de trois plans tangents généralement nécessaires pour qu'il y ait tangence complète, il n'en faut plus que deux et même un suivant les circonstances. C'est ainsi, par exemple, que deux plans tangents suffisent pour les surfaces conoïdes ayant une génératrice commune, et qu'il n'en faut qu'un seul pour les surfaces développables.

CONCOURS D'AGRÉGATION POUR LES LYCÉES,

Composition en Mécanique;

PAR M. J. ROMAND,
Licencié ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

Dans un cylindre droit à base circulaire dont l'axe est horizontal, on place un prisme triangulaire droit qui touche le cylindre par deux de ses arêtes latérales. On demande dans quelles positions ce prisme demeurera en équilibre sous l'action de la pesanteur.

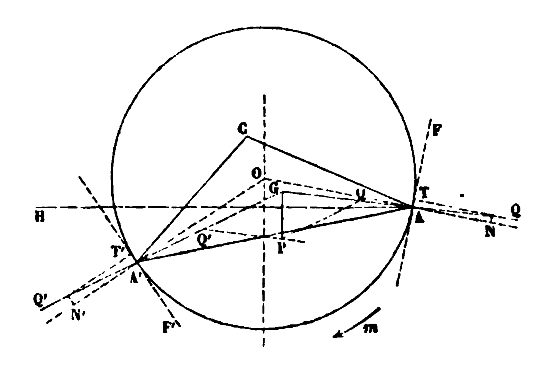
On aura égard au frottement et on déterminera les pressions exercées par le prisme dans ses positions extrêmes.

Nous admettrons : 1° que le prisme est homogène ou formé de filets prismatiques séparément homogènes, parallèles aux arêtes latérales ; 2° que la surface du cylindre et les arêtes du prisme sont telles, que les réactions du cylindre sur des éléments égaux de chaque arête en contact avec sa surface soient équivalentes à des forces égales normales à cette arête et parallèles entre elles.

Le prisme étant placé dans le cylindre, soit ACA′ le triangle et O la circonférence suivant lesquels le système est coupé par un plan perpendiculaire aux arêtes passant par le centre de gravité G du prisme. D'après nos hypothèses, les réactions du cylindre se réduisent à deux forces appliquées en A et en A′, dont les directions sont comprises dans le plan de la section.

La position du triangle ACA′ dans la circonférence O, par suite celle du prisme dans le cylindre, est déterminée par l'angle aigu que AA′ fait avec une horizontale, par exemple avec AH ; cet angle A′AH sera désigné par φ et

considéré comme positif ou négatif, selon qu'il se trouve au-dessous de AH ou au-dessus.



Abstraction faite du frottement, il n'y aurait qu'une seule position d'équilibre du prisme reposant sur le cylindre par les arêtes A et A'; le centre de gravité G serait sur la verticale du point O, et l'équilibre serait stable ou instable selon que G se trouverait au-dessous ou au-dessus de O. Eu égard au frottement, il y a une infinité de positions d'équilibre comprises entre deux positions extrêmes auxquelles répondent des valeurs limites de l'angle φ qu'il s'agit de calculer. Deux cas doivent être distingués :

1° Le centre de gravité G est dans le triangle AOA'.

Soient r le rayon du cylindre ou de la circonférence O;

a le côté AA' du triangle ACA';

β les angles en A, A' du triangle isocèle AOA' (cette donnée dépend de r et de a);

α, α' les angles en A, A' du triangle AGA' (ils déterminent la position de G dans le triangle ACA' et sont inférieurs à β dans le cas considéré);

P le poids du prisme;

f l'angle du frottement.

Décomposons le poids P en deux forces Q, Q' dirigées

suivant GA, GA′ et transportons ces forces respectivement en A, A′. Décomposons encore Q, Q′ appliquées aux points A, A′, en N, N′ normales à la circonférence O, et T, T′ tangentielles, qui seront de sens contraires. Les composantes tangentielles des réactions du cylindre sur le prisme, appliquées à celui-ci en A, A′, seront respectivement N tang f, N′ tang f.

Si le centre de gravité G était sur la verticale du point O, l'équilibre subsisterait. Supposons que le prisme soit successivement placé sans impulsion dans des positions pour lesquelles G se trouve du même côté que A par rapport à cette verticale, il tendra à se mouvoir ou se mouvra effectivement dans le sens indiqué par la flèche m, en sorte que les frottements N tang f, N′ tang f seront de même sens que la force T; la condition d'équilibre sera dans ce cas la relation

$$(1) \qquad T' - T \leqq (N + N') \tang f.$$

Regardons en effet pour un moment les frottements N tang f, N′ tang f comme des forces, pour ainsi dire *actives*, appliquées aux points A, A′ du prisme, nous arriverons à la condition d'équilibre en considérant ce corps comme lié à l'axe du cylindre et assujetti à tourner seulement autour de cette droite fixe, qui remplacera en quelque sorte les résistances N, N′ normales au cylindre. Pour l'équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des moments, par rapport à l'axe fixe, des quatre forces T, T′, N tang f, N′ tang f, soit nulle; ces moments sont Tr, — T′r, Nr tang f, N′r tang f, en prenant positivement celui de la force T, ce qui détermine le signe des autres: on a donc $T - T' + (N + N') \tang f = 0$, suppression faite du facteur commun r, ou bien $T' - T = (N + N') \tang f$. Enfin, comme N tang f, N′ tang f sont des frottements et non des forces effective-

ment appliquées au prisme, il est clair que la condition de notre problème est seulement que $T'-T$ ne surpasse pas $(N+N')\tang f$.

Au moyen des équations

$$N=Q\cos(\beta-\alpha),\quad T=Q\sin(\beta-\alpha),$$
$$N'=Q'\cos(\beta-\alpha'),\quad T'=Q'\sin(\beta-\alpha'),$$

la relation (1) se ramène à

$$Q'[\sin(\beta-\alpha')-\cos(\beta-\alpha')\tang f]$$
$$\leqq Q[\sin(\beta-\alpha)+\cos(\beta-\alpha)\tang f],$$

d'où l'on tire

$$Q'\sin(\beta-\alpha'-f)\leqq Q\sin(\beta-\alpha+f),$$

car $\cos f$ est positif; plus simplement, on a

$$Q'n'\leqq Qn,$$

en posant

$$\sin(\beta-\alpha'-f)=n' \quad \text{et} \quad \sin(\beta-\alpha+f)=n.$$

Remplaçant Q et Q' par leurs valeurs tirées des équations

$$\text{(A)} \qquad \frac{Q}{\cos(\alpha'+\varphi)}=\frac{Q'}{\cos(\alpha-\varphi)}=\frac{P}{\sin(\alpha+\alpha')}$$

qui subsistent pour toutes les valeurs de φ, on trouve d'abord

$$n'\cos(\alpha-\varphi)\leqq n\cos(\alpha'+\varphi),$$

car il est permis de supprimer le facteur commun positif $\frac{P}{\sin(\alpha+\alpha')}$, puis

$$(n\sin\alpha'+n'\sin\alpha)\sin\varphi\leqq(n\cos\alpha'-n'\cos\alpha)\cos\varphi.$$

Cette condition est nécessairement remplie par la valeur de φ qui répond à la position du prisme dans laquelle OG

est verticale; elle le sera aussi pour des directions de cette droite assez voisines de la verticale, répondant à des valeurs de φ un peu plus grandes; mais elle doit cesser de l'être pour des directions trop écartées de la verticale, c'est-à-dire pour de trop grandes valeurs de φ. D'après cela le coefficient de sin φ doit être positif, et on a par conséquent

$$\operatorname{tang}\varphi \leqq \frac{n\cos\alpha' - n'\cos\alpha}{n\sin\alpha' + n'\sin\alpha},$$

d'où se déduira une des deux limites de φ.

Supposons maintenant que le prisme soit placé dans des positions pour lesquelles le centre de gravité G s'écarte de la verticale du point O du côté de A', il tendra à se mouvoir ou se mouvra dans le sens opposé à la flèche m, et les frottements seront de même sens que la force T'; la condition d'équilibre sera donc

$$(3) \qquad \mathrm{T} - \mathrm{T}' \leqq (\mathrm{N} + \mathrm{N}')\operatorname{tang} f,$$

ou bien

$$\mathrm{T}' - \mathrm{T} \geqq (\mathrm{N} + \mathrm{N}')\operatorname{tang}(-f).$$

Cette relation ne différant de l'équation (1) que par l'inversion du signe de relation et par le changement de f en $-f$, si l'on remarque d'ailleurs qu'elle ne doit cesser d'avoir lieu qu'autant que φ prend des valeurs trop petites (φ décroît et peut devenir négatif quand OG s'écarte de la verticale du point O, dans le sens que l'on considère), on en conclut immédiatement

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\varphi \geqq \frac{n_1\cos\alpha' - n'_1\cos\alpha}{n_1\sin\alpha' + n'_1\sin\alpha},$$

en posant

$$\sin(\beta - \alpha - f) = n_1 \quad \text{et} \quad \sin(\beta - \alpha' + f) = n'_1.$$

2° Le centre de gravité G est hors du triangle AOA'.

Un des angles α, α' au moins surpasse β; mais nous nous contenterons de considérer le cas dans lequel on a en même temps $\alpha > \beta$, $\alpha' > \beta$.

Les composantes T, T' sont dirigées suivant AF, A'F', et, quand le prisme tend à se mouvoir dans le sens indiqué par la flèche m, les frottements sont de même sens que T'; la condition d'équilibre est donc

$$(5) \qquad T - T' \leqq (N + N') \operatorname{tang} f.$$

N, N' conservent les mêmes expressions que dans le premier cas, et la formule (A) ne change pas, mais on a

$$T = Q \sin(\alpha - \beta), \quad T' = Q' \sin(\alpha' - \beta).$$

D'après cela, et si l'on remarque que c'est quand l'angle φ diminue que le centre de gravité G s'écarte de la verticale du point O du côté de A, par suite que l'équilibre peut se trouver rompu, pour ainsi parler, dans le sens de la flèche m, on arrive à l'inégalité

$$(6) \qquad \operatorname{tang} \varphi \geqq \frac{n \cos \alpha' - n' \cos \alpha}{n \sin \alpha' + n' \sin \alpha},$$

n et n' représentant les mêmes sinus que dans la formule (2) dont celle-ci ne diffère que par l'inversion du signe de relation.

En considérant la rupture de l'équilibre dans le sens opposé à la flèche m, on trouve

$$(7) \qquad T' - T \leqq (N + N') \operatorname{tang} f,$$

qui a les mêmes rapports avec la relation (5) que (3) avec (1). On en déduirait donc

$$(8) \qquad \operatorname{tang} \varphi \leqq \frac{n_1 \cos \alpha' - n'_1 \cos \alpha}{n_1 \sin \alpha' + n'_1 \sin \alpha},$$

n_1 et n'_1 représentant les mêmes sinus que dans la formule (4).

Enfin, pour avoir les pressions exercées sur le cylindre par le prisme dans ses positions extrêmes d'équilibre, on tirera des formules

$$\tang\varphi = \frac{n\cos\alpha' - n'\cos\alpha}{n\sin\alpha' + n'\sin\alpha}, \quad \tang\varphi = \frac{n_1\cos\alpha' - n'_1\cos\alpha}{n_1\sin\alpha' + n'_1\sin\alpha}$$

les valeurs de φ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ qu'elles déterminent; on portera successivement ces valeurs de φ dans les formules (A) qui donneront des valeurs correspondantes pour Q et Q', et il ne restera plus qu'à mettre celles-ci dans les équations

$$N = Q\cos(\beta - \alpha), \quad N' = Q'\cos(\beta - \alpha').$$

NOTE SUR L'UNE DES FORMES DU RESTE DANS LA SÉRIE DE TAYLOR;

PAR M. REYNAUD,
Professeur au lycée de Toulouse.

Étant donnée une fonction quelconque de x, $f(x)$, on pose l'égalité

$$f(x_1 + h) = f(x_1) + \frac{h}{1}f'(x_1) + \frac{h^2}{1.2}f''(x_1) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_1) + R,$$

où x_1 et $x_1 + h$ sont deux valeurs particulières de x, et l'on se propose de déterminer, si c'est possible, la valeur du terme complémentaire R.

On a

$$R = f(x_1 + h) - f(x_1) - \frac{h}{1}f'(x_1) - \frac{h^2}{1.2}f''(x_1) - \ldots - \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_1).$$

Soit

$$y = \varphi(x) = f(x_1 + h) - f(x) - \frac{x_1 + h - x}{1} f'(x)$$
$$- \frac{(x_1 + h - x)^2}{1.2} f''(x) - \ldots - \frac{(x_1 + h - x)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x)$$

l'ordonnée d'une courbe dont x est l'abscisse, les axes étant rectangulaires. On voit immédiatement que pour $x = x_1 + h$, cette ordonnée est nulle si les dérivées successives de $f(x)$ prennent pour cette valeur de x des valeurs finies, et que pour $x = x_1$ l'ordonnée est égale à R. Si, pour cette dernière valeur de x, la fonction et ses dérivées ont des valeurs finies, la valeur de R est elle-même finie, positive ou négative. Soient (*)

$$\mathrm{OP} = x_1, \quad \mathrm{OP}' = x_1 + h \quad \text{et} \quad \mathrm{PM} = \mathrm{R}.$$

Le point M est au-dessus ou au-dessous de l'axe des x. Dans les deux cas, si la fonction $f(x)$ et sa dérivée sont finies et continues entre les limites x_1 et $x_1 + h$ de la variable, on pourra mener à l'arc AB, entre les points A et B, une tangente parallèle à sa corde AB, et l'abscisse du point de contact pourra être représentée par $x_1 + \theta h$, θ étant un nombre positif compris entre 0 et 1. Si R est positif, on a

$$\mathrm{R} = \overline{\mathrm{PM}} = \overline{\mathrm{PP}'}.\mathrm{tang\,MP'P} = -h\,\mathrm{tang\,MP}'x = -h\varphi'(x_1 + \theta h);$$

si R est négatif, on a de même

$$\mathrm{R} = -\mathrm{PM} = -h\,\mathrm{tang\,MP'P} = -h\varphi'(x_1 + \theta h).$$

Or

$$\varphi'(x) = -\frac{(x_1 + h - x)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)} x,$$

et par suite

$$\varphi'(x_1 + \theta h) = -\frac{h^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(x);$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

substituant, on a la formule connue

$$R = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(x_1 + \theta h).$$

Remarque. — On verra au moyen d'une figure que la démonstration se fait de la même manière, quel que soit le signe de l'accroissement h.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. SCHLOMILCH

(voir t. XIX, p. 280);

PAR M. HENRY COLLACHE,
Élève de mathématiques spéciales au lycée Charlemagne
(classe de M. Hauser).

Il s'agit de montrer que l'on a

$$1^2.2^2.3^2\ldots n^2 > n^n.$$

On peut toujours poser

$$n > p + 1,$$

d'où, en multipliant par p,

$$np > p^2 + p,$$

et, par conséquent,

$$np + n > p^2 + p + n,$$

ou

$$(n-p)(p+1) > n.$$

En faisant successivement $p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, et multipliant membre à membre, il vient

$$1^2.2^2.3^2\ldots n^2 > n^n.$$

C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 553
(voir t. XIX, p. 406);

PAR M. A. G.

Étant donnée une équation algébrique n'ayant pas de racines égales, si l'on applique à cette équation le procédé de Sturm, et si l'une des équations obtenues a des racines égales, l'équation a nécessairement des racines imaginaires. (ROUGET.)

Soient $X = 0$ l'équation proposée et X_1, X_2, X_3,..., les divers polynômes que l'on considère. Supposons que $X = 0$ ait toutes ses racines réelles et inégales au nombre de m, l'équation $X_1 = 0$ aura aussi toutes ses racines réelles et inégales au nombre de $m - 1$.

Soient a', b', c'... k' ces racines par ordre de grandeur. Pour ces valeurs X et X_2 sont égaux et de signes contraires. D'ailleurs x variant de a' à b', X change de signe; donc il en est de même pour X_2. Ceci est vrai, quelles que soient les racines a' et b'. Comme il y a $m - 2$ intervalles, l'équation $X_2 = 0$ du degré $(m - 2)$ aura toutes ses racines réelles et inégales. On ferait voir pareillement qu'il en est de même des autres équations.

QUESTION.

656. Démontrer *géométriquement* que la division de la circonférence en sept parties égales se ramène à la trisection de l'angle dont la tangente est égale à $3\sqrt{3}$.

(MATTHEW COLLINS.)

SOLUTION DE LA QUESTION 641 (CATALAN)

(voir p. 93);

PAR M. H. PICQUET,
Élève de mathématiques spéciales au lycée de Poitiers.

Il s'agit de démontrer la relation

$$\begin{aligned}&\cos(a+b+c)\cos(a+b-c)\cos(a+c-b)\cos(b+c-a)\\&=4\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c-(\cos a+\cos b+\cos c)(\cos a+\cos b-\cos c)\\&\qquad\times(\cos a+\cos c-\cos b)(\cos b+\cos c-\cos a).\end{aligned}$$

Le second membre peut s'écrire

$$\begin{aligned}&4\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c\\&-[(\cos a+\cos b)^2-\cos^2 c][\cos^2 c-(\cos a-\cos b)^2],\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&4\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c\\&+(\cos^2 a-\cos^2 b)^2+\cos^4 c-2\cos^2 c(\cos^2 a+\cos^2 b),\end{aligned}$$

ou

$$(\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c)^2-4\cos^2 b\cos^2 c+4\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c.$$

Examinons maintenant le premier membre. En transformant en une somme de cosinus les deux premiers facteurs, ainsi que les deux derniers, il vient

$$\frac{1}{2}[\cos 2(a+b)+\cos 2c]\,\frac{1}{2}[\cos 2c+\cos 2(a-b)]$$

ou

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\Big\{\cos^2 2c+\cos 2(a+b)\cos 2(a-b)\\&\qquad+\cos 2c[\cos 2(a+b)+\cos 2(a-b)]\Big\}.\end{aligned}$$

En remplaçant

$$\cos 2(a+b)\cos 2(a-b)$$

par

$$\frac{1}{2}(\cos 4a + \cos 4b)$$

ou par

$$\frac{1}{2}(2\cos^2 2a - 1 + 2\cos^2 2b - 1)$$

ou par

$$\cos^2 2a + \cos^2 2b - 1 \quad \text{et} \quad \cos 2c\,[\cos 2(a+b) + \cos 2(a-b)]$$

par

$$2\cos 2a \cos 2b \cos 2c,$$

il vient

$$\frac{1}{4}(\cos^2 2a + \cos^2 2b + \cos^2 2c + 2\cos 2a \cos 2b \cos 2c - 1).$$

A la place de $\cos 2a$, je mets $2\cos^2 a - 1$, et les expressions analogues pour $\cos 2b$ et $\cos 2c$: il vient alors

$$\frac{1}{4}[4\cos^4 a + 4\cos^2 a + 1 + 4\cos^4 b - 4\cos^2 b + 1 + 4\cos^4 c - 4\cos^2 c$$
$$+ 1 + 2(2\cos^2 a - 1)(2\cos^2 b - 1)(2\cos^2 c - 1) - 1].$$

Toute réduction faite, il reste

$$\cos^4 a + \cos^4 b + \cos^4 c - 2\cos^2 a \cos^2 b - 2\cos^2 a \cos^2 c$$
$$- 2\cos^2 b \cos^2 c + 4\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c,$$

ou

$$(\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c)^2 - 4\cos^2 b \cos^2 c + 4\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c,$$

qui est précisément la valeur à laquelle j'étais arrivé pour le second membre.

SOLUTION DE LA QUESTION 645

(voir p. 94);

PAR M. L. RAYNAUD,
Maître répétiteur au lycée de Moulins.

Soient δ, δ', δ'' les distances du centre d'une conique à trois tangentes, et ρ, ρ', ρ'' les distances de ce centre aux points de contact : on a

$$\delta^2\rho^2(\delta''^2-\delta'^2)+\delta'^2\rho'^2(\delta^2-\delta''^2)+\delta''^2\rho''^2(\delta'^2-\delta^2)=0.$$

1° *Cas de l'ellipse.*

Supposons l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et soient :

x, y les coordonnées de l'extrémité de ρ;

λ la longueur du demi-diamètre conjugué de ρ;

δ sera la hauteur du parallélogramme construit sur les longueurs ρ et λ.

On pourra écrire, d'après des théorèmes connus :

$$ab=\delta\lambda \quad \text{et} \quad a^2+b^2=\rho^2+\lambda^2,$$

d'où

$$(1) \qquad a^2b^2=\delta^2(a^2+b^2-\rho^2).$$

On aura de même, en considérant les autres points de contact,

$$(2) \qquad a^2b^2=\delta'^2(a^2+b^2-\rho'^2),$$

$$(3) \qquad a^2b^2=\delta''^2(a^2+b^2-\rho''^2).$$

Éliminant maintenant a^2+b^2 entre les équations (1), (2), (3), il vient

$$\frac{\delta^2\rho^2-\delta'^2\rho'^2}{\delta^2-\delta'^2}=\frac{\delta^2\rho^2-\delta''^2\rho''^2}{\delta^2-\delta''^2}$$

ou

$$\delta^2\rho^2(\delta''^2-\delta'^2)+\delta'^2\rho'^2(\delta^2-\delta''^2)+\delta''^2\rho''^2(\delta'^2-\delta^2)=0.$$

2° *Cas de l'hyperbole.*

Le mode de solution prouve assez que la relation finale subsiste encore dans le cas de l'hyperbole.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Dupain, professeur au lycée d'Angoulême; P. R. et Melon, élèves du collége Rollin; Cornille, élève du lycée de Strasbourg; Pelletreau et Picquet, élèves du lycée de Poitiers; Jarlot, du lycée Louis-le-Grand; Harang, du lycée de Douai.

REMARQUES

Sur les compositions de Mathématiques et de Trigonométrie faites en 1862 pour l'admission à l'École Polytechnique.

Un de nos amis, chargé en 1862 de corriger les compositions de Mathématiques et de Trigonométrie, nous a communiqué les remarques qui lui ont été suggérées par ce travail. Nous les publions parce qu'elles peuvent être utiles aux élèves, en les prémunissant contre certaines fautes assez communes. Nous ne croyons pas d'ailleurs commettre une indiscrétion, car si l'examen des compositions n'est pas public, cela tient uniquement à la nature d'un travail qui ne peut se bien faire que dans le silence du cabinet; mais l'École a toujours donné très-libéralement les renseignements qui lui ont été demandés sur cette partie des épreuves imposées aux candidats.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

Trouver le lieu des centres des surfaces représentées par l'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2pxz + 2qyz - 2ax - 2by + 2cz = 0:$$

1° *lorsque p et q varient de toutes les manières possibles;* 2° *lorsque p et q varient de manière que l'équation représente un cône.* 3° *Distinguer la partie du lieu qui correspond à des hyperboloïdes à une nappe de celle qui correspond à des hyperboloïdes à deux nappes.*

La première partie de la question, très-facile, a été résolue par la généralité des candidats. La différence de leurs forces ou de leur talent ne s'est révélée que dans les deux autres parties. A cet égard, on a pu classer les élèves en cinq groupes, comme il suit :

1° Les élèves de ce groupe ont trouvé pour le premier lieu une sphère; pour le second, ils ont remarqué que les coordonnées du sommet du cône devaient satisfaire à l'équation

$$ax + by - cz = 0,$$

d'où il résultait que le lieu cherché est un cercle. La distinction des deux hyperboloïdes et des régions de la sphère correspondant aux centres des hyperboloïdes à une nappe, ou à ceux des hyperboloïdes à deux nappes, a été bien faite par ces élèves, qui ont mérité une note de 17 à 20.

2° Les élèves du deuxième groupe, après avoir éliminé p et q entre les équations du centre et celle de la surface, ont trouvé un cône de révolution ayant son sommet sur la sphère et dont l'axe passait par le centre : ils ont donc trouvé le cercle. Cette marche était assez longue, mais elle se présentait naturellement et il y avait un certain mérite à la conduire jusqu'au bout. Notes de 15 à 19.

3° Les élèves du troisième groupe ont trouvé pour le deuxième lieu l'intersection d'un cône et d'une sphère, mais ils n'ont pas vu que le cône était de révolution. En donnant une solution exacte d'ailleurs, ils n'ont pas

su dégager de leurs calculs le résultat simple qu'ils renfermaient. Notes de 10 à 14.

4° D'autres élèves ont commencé comme les précédents, mais des erreurs de calculs les ont conduits à de faux résultats ou les ont empêchés d'arriver jusqu'au bout. Notes de 5 à 9.

5° Les élèves de ce dernier groupe, fort peu nombreux, n'ont pas trouvé la sphère ou distingué les deux sortes d'hyperboloïdes. Notes au-dessous de 5.

Comme on le voit par ce tableau, des notes différant de 4 ou 5 unités ont pu être attribuées à des élèves qui ont suivi la même marche et sont arrivés aux mêmes résultats. Un langage correct, une exposition claire, des calculs disposés avec beaucoup d'ordre sont des qualités dont le correcteur fait grand cas et dont il tient toujours compte. Ces précieuses qualités ne peuvent s'acquérir qu'à la longue. Il importe donc beaucoup que les candidats prennent de bonne heure l'habitude de bien rédiger, et qu'ils ne croient pas avoir assez fait en résolvant une question s'ils ne l'ont pas présentée de la manière la plus satisfaisante.

Il y a encore une recommandation à faire aux candidats : c'est de ne point s'abandonner à la première méthode qui se présente à eux. Ce n'est presque jamais la meilleure. Souvent on s'engage dans des calculs fort longs, qu'on ne peut mener à bonne fin, et on ne s'aperçoit qu'on fait fausse route que lorsqu'il est trop tard pour recommencer. Il faut donc jeter un coup d'œil d'ensemble sur la question proposée, comparer les diverses méthodes à suivre et prendre celle qui promet de conduire le plus rapidement au but. Mais cela demande beaucoup de tact, et ce tact ne peut s'acquérir que par l'habitude. Ainsi il faut travailler : c'est la condition du succès.

COMPOSITION DE TRIGONOMÉTRIE.

Un triangle résolu avec l'exactitude que comportent les Tables donne lieu à une note qui varie de 18 à 20 suivant que les calculs sont disposés avec plus ou moins d'ordre. Les autres notes s'échelonnent de 18 à 5. Pour obtenir une note au-dessous de 5, il faut n'avoir presque rien fait ou commettre des fautes qui montrent qu'on a systématiquement négligé cette partie du programme.

Un élève qui s'est beaucoup éloigné de la vraie solution peut être mieux noté qu'un autre, qui s'en sera beaucoup approché. Cela tient à la nature des fautes commises, et dont l'influence sur le résultat du calcul n'est pas toujours en raison directe de leur gravité. Le correcteur recommence tous les calculs, et quand il a rencontré une erreur, il en suit les conséquences, pour savoir s'il n'a pas été commis d'autres fautes.

Les fautes les plus ordinaires dans la composition de trigonométrie sont de diverses sortes : les unes sont de pures distractions ou tiennent au peu d'usage que l'on a des Tables; les autres sont des fautes de calcul proprement dites; enfin la dernière classe comprend les erreurs théoriques.

I. *Fautes de distraction.*

1° Prendre, au lieu du logarithme que l'on cherche, celui qui est immédiatement au-dessus; faute assez fréquente quand le logarithme est dans l'une des trois dernières colonnes. C'est un inconvénient attaché aux Tables à double entrée.

2° Erreurs de transcription : transposition de deux chiffres, 89 pour 98; erreur qui vient de ce qu'au lieu de lire les quatre derniers chiffres comme s'ils formaient un seul nombre, on les lit comme s'ils étaient séparés, et en les transcrivant on se trompe sur leur ordre. Il vaut

mieux dire *quatre mille huit cent vingt-quatre,* que de dire *quatre, huit, deux, quatre.*

3° Un 1 surchargé pour un 0, un 6 ou un 9 pour un 0, un 1 ou un 2 mal faits pour un 7, et réciproquement. Nécessité d'écrire lisiblement, surtout les chiffres.

4° Tangentes prises dans la colonne des sinus, sinus dans la colonne des cosinus, etc.

5° Les degrés pris en bas quand il doivent l'être en haut, les minutes prises à droite quand elles doivent l'être à gauche, etc.

6° Les minutes prises à droite en descendant et les secondes à gauche, surtout pour les cotangentes. Erreur qu'on ne commettrait pas avec une Table à simple entrée.

7° Après avoir calculé tang $\frac{A}{2}$, prendre $\frac{A}{2}$ pour A. De même prendre $a+b$, $a-b$ au lieu de $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$.

8° Différence des sinus prise pour celle des cosinus, différence des cosinus pour celle des tangentes.

9° A — B pris pour B — A, A pour B.

10° Logarithme pris dans une autre page :

$$\log 7^\circ 32' 43'',54 \quad \text{pris pour} \quad \log 8^\circ 32' 43'',54.$$

11° Prendre la caractéristique des Tables pour le premier chiffre de la partie décimale : $\bar{1},986\ldots$ pour $9,86\ldots$

12° Calculer la moitié de $\frac{c}{2}$ au lieu du double de $\frac{c}{2}$.

13° $\sin^2\varphi$ pour $1+\cos^2\varphi$.

14° Erreur de transcription quand on écrit de nouveau un logarithme déjà trouvé, surtout sur une page différente.

15° Terme omis en calculant une formule exacte.

II. *Fautes de calcul.*

1° Erreur dans une addition de nombres ordinaires. Retenues omises, retenues comptées quand il n'y en a pas. Si trois fois de suite on a dit : *je pose tant et je retiens* 1, on a beaucoup de chance, en passant à la colonne suivante, de dire encore : *je retiens* 1, quoiqu'on n'ait qu'un seul chiffre à écrire.

2° Erreur dans une addition ou dans une soustraction de nombres complexes. Très-fréquente.

3° Erreur en prenant le double ou la moitié d'un nombre complexe.

4° Erreur en prenant le supplément ou le complément d'un angle.

5° Erreur dans la caractéristique par suite de soustraction.

6° Caractéristique 8 des Tables remplacée par $\bar{1}$ au lieu de $\bar{2}$.

7° Virgule mal placée dans le terme de correction.

8° Erreur dans la multiplication faite pour obtenir ce terme.

9° Erreur en prenant la moitié d'un logarithme dont la caractéristique est négative : $\frac{\bar{1},42}{2} = \bar{1},21$ pour $\bar{1},71$.

III. *Erreurs théoriques.*

1° Erreur dans le signe de la correction quand on cherche le logarithme d'un cosinus ou d'une cotangente.

2° Le correcteur a trouvé quarante-quatre formules fausses, ce qui est d'autant plus impardonnable que presque toujours leur fausseté saute aux yeux, et que d'ailleurs les vraies formules se trouvent dans l'Introduction placée en tête des Tables.

3° Employer les parties proportionnelles pour le sinus ou la tangente d'un arc très-petit.

4° Négliger les fractions de seconde dans un angle auxiliaire.

5° Calculer des chiffres incertains.

6° Prendre — log cot A pour log (— cot A).

7° En cherchant log cos 43° 24′ 12″, 34, ajouter à log cos 43° 24′ 20″ la différence tabulaire × 2,34 au lieu de 7,66.

8° Il s'est trouvé un candidat admissible qui, pour calculer

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

a calculé chaque terme du deuxième membre par logarithmes.

9° Un autre candidat a remplacé la formule précédente par

$$\log\cos a = \log\cos b + \log\cos c + \log\sin b + \log\sin c + \log\cos A.$$

Comme on le voit, il y a beaucoup de manières de se tromper, et encore nous en passons. Il faut que les élèves se persuadent qu'on n'apprend pas en deux heures à se servir des Tables et à résoudre un triangle. C'est à eux de s'exercer pendant un temps suffisamment long.

Enfin les candidats doivent savoir qu'une fraude commise dans la composition ne peut manquer d'être découverte par le correcteur qui vérifie minutieusement tous les calculs. Il y a des exemples d'élèves qui auraient pu être admis, même avec une composition inachevée, et qui ont été exclus du concours pour avoir emprunté à un voisin un résultat faux qui ne s'accordait pas avec les calculs commencés. Le résultat aurait été vrai, que l'exclusion aurait encore été prononcée. Il vaut donc mieux agir loyalement. P.

SOLUTION DE LA QUESTION 654

(voir p. 191);

PAR M. TRAVELET,
Élève en mathématiques spéciales du lycée de Besançon
(classe de M. Chevilliet).

Démontrer que si $\varphi(2\omega) = \varphi(\omega).\cos\omega$, *on aura*

$$\varphi(\omega) = \varphi(0)\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

(VALTON.)

Dans la condition énoncée, je remplace successivement ω par $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{4}, \ldots, \frac{\omega}{2^n}$, et j'obtiens les égalités suivantes :

$$\varphi(\omega) = \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot\cos\frac{\omega}{2},$$

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{4}\right)\cdot\cos\frac{\omega}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2^{n-1}}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2^n}\right)\cdot\cos\frac{\omega}{2^n}.$$

Multipliant toutes ces égalités membre à membre et supprimant tous les facteurs communs, on a

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2^n}\right)\cdot\cos\frac{\omega}{2}\cdot\cos\frac{\omega}{4}\cdots\cos\frac{\omega}{2^n} = \varphi(\omega).$$

Or on sait que (t. XVII, p, 283)

$$\cos\frac{\omega}{2}\cdot\cos\frac{\omega}{4}\cdots\cos\frac{\omega}{2^n} = \frac{\sin\omega}{\omega}\cdot\frac{\frac{\omega}{2^n}}{\sin\frac{\omega}{2^n}}.$$

Remplaçant ce produit par sa valeur, dans l'équation

précédente, on a

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2^n}\right)\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}\cdot\frac{\frac{\omega}{2^n}}{\sin\frac{\omega}{2^n}}=\varphi(\omega).$$

Si n augmente indéfiniment, $\frac{\omega}{2^n}$ tend vers zéro; $\varphi\left(\frac{\omega}{2^n}\right)$ tend vers $\varphi(o)$ et $\frac{\frac{\omega}{2^n}}{\sin\frac{\omega}{2^n}}$ tend vers 1. Alors à la limite on a

$$\varphi(o)\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}=\varphi(\omega).\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. — Cette question a été résolue de la même manière par MM. de Virieu, Dupain, professeurs, et par les élèves Claris et Courtin (Sainte-Barbe), Esparseil (lycée de Toulouse, classe de M. Tillol), Monniot (institution Barbet), par MM. Autos, d'Athènes, et Bardelli, de Milau.

SECONDE SOLUTION DE LA MÊME QUESTION;

PAR M. STUDLER,
Professeur à Condé.

En prenant plusieurs fois de suite la dérivée de l'équation

$$\varphi(2\omega)=\cos\omega\,\varphi(\omega)$$

et faisant $\omega=o$, on trouve

$$\varphi'(o)=\varphi'''(o)=\varphi^{v}(o)=\ldots=o$$

et

$$\varphi''(o)=-\frac{\varphi(o)}{3},\quad \varphi^{iv}(o)=-\frac{\varphi(o)}{5},\quad \varphi^{vi}(o)=-\frac{\varphi(o)}{7},\ldots$$

Et si l'on substitue ces valeurs dans la formule de Mac-

laurin,

$$\varphi(\omega) = \varphi(0) + \frac{\omega}{1}\varphi'(0) + \frac{\omega^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots,$$

on aura

$$\varphi(\omega) = \frac{\varphi(0)}{\omega}\left(\omega - \frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

ou

$$\varphi(\omega) = \varphi(0)\frac{\sin\omega}{\omega}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. — M. Mogni, de Tortone, et M. Jaufroid, professeur au lycée de Vendôme, ont résolu la question à peu près de la même manière.

M. Beltrami nous a adressé, au sujet de cette question, des remarques intéressantes qui seront publiées dans notre prochain numéro.

BIBLIOGRAPHIE.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES SUR LES NORMALES AUX CONIQUES; par M. *Desboves,* docteur ès sciences, professeur au lycée Bonaparte. In-8 de II-54 pages. Paris, Mallet-Bachelier, 1861. Prix : 1f,50. — THÉORIE NOUVELLE DES NORMALES AUX SURFACES DU SECOND ORDRE, suivie de NOTES SUR L'ALGÈBRE, LA GÉOMÉTRIE ET LA MÉCANIQUE. In-8 de XII-144 pages. Paris, Mallet-Bachelier, 1862. Prix : 2f,50.

Nous recommandons aux élèves et aux professeurs ces deux monographies, très-complètes et qui renferment plusieurs parties neuves. L'auteur, habitué à l'enseignement, n'a voulu se servir que de méthodes familières aux élèves de mathématiques spéciales, qui pourront ainsi lire ces deux opuscules d'un bout à l'autre sans être obligés d'avoir recours à d'autres ouvrages.

Voici les principaux résultats du deuxième opuscule.

Par un point, on peut mener généralement six normales à une surface du second ordre. Ces six normales sont sur un même cône du second degré (CHASLES). Les vingt pôles des plans passant par les pieds des six normales pris trois à trois sont sur une surface du quatrième ordre représentée, dans le cas de l'ellipsoïde, par l'équation

$$(b^2 - c^2)^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 z^2}{b^2 c^2}\right) + (c^2 - a^2)^2 \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2 x^2}{c^2 a^2}\right)$$
$$+ (a^2 - b^2)^2 \left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right) = 0$$

Cette surface, que M. Desboves appelle *normopolaire*, jouit de propriétés curieuses. Elle renferme toujours huit droites parallèles à l'axe moyen de l'ellipsoïde et touche cette surface à ses quatre ombilics. Si par les différents points d'une section faite dans une surface du second degré par un plan perpendiculaire à un plan principal on mène des normales à la surface, leurs pieds sur le plan principal seront situés sur une droite (CHASLES). Etc.

Aux problèmes traités dans le texte, M. Desboves en ajoute beaucoup d'autres comme sujets d'exercice. Les notes placées à la fin se rapportent à diverses questions d'enseignement et seront lues avec intérêt.

En résumé M. Desboves a fait un ouvrage utile. Nous n'y trouvons à reprendre que les mots de formation hybride *synnormale*, *normopolaire*, dont l'introduction dans la science ne nous paraît pas répondre à une nécessité bien démontrée. Nous avons aussi rencontré çà et là quelques incorrections qu'il faudra faire disparaître dans une seconde édition. Par exemple, pourquoi dire « le plan de pôle (α, β, γ), » au lieu de « le plan dont le pôle est le point (α, β, γ) » ? Il ne faut pas, ce me semble, regarder à trois mots de plus quand la phrase doit être rendue plus claire et plus correcte.

P.

EXTRAIT D'UN MÉMOIRE SUR LES COORDONNÉES TRILINÉAIRES;

PAR M. H. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Un point est déterminé dans un plan lorsque l'on connaît ses distances α, β, γ aux trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC dit *triangle de référence*. Si l'on désigne par a, b, c les côtés du triangle, par S la surface, on a toujours la relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S.$$

Toute relation du premier degré

$$L = l\alpha + m\beta + n\gamma$$

entre les coordonnées α, β, γ d'un point représente une ligne droite.

Équation de la droite qui passe par deux points donnés α' et α''.

Si l'on désigne par $(\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées du point α', par $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ celles du point α'', la droite cherchée a pour équation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

Intersection de deux droites. — Parallélisme.

Soient $L = 0$, $L' = 0$ les droites données : L' se déduisant de L en ajoutant un accent aux lettres l, m, n, on

aura au point d'intersection

$$D\alpha = 2S(mn' - m'n),$$
$$D\beta = 2S(nl' - n'l),$$
$$D\gamma = 2S(lm' - l'm),$$
$$D = \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

$D = 0$ est la condition du parallélisme. Ces formules montrent également que la droite qui a pour équation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

est l'équation d'une droite située à l'infini dans le plan du triangle de référence.

Angle des deux droites L *et* L'.

$$\tang \theta = \frac{D}{2R[(ll' + mm' + nn') - \cos A(mn' + m'n) - \cos B(ln' + l'n) - \cos C(lm' + l'm)]}.$$

R rayon du cercle circonscrit au triangle ABC; A, B, C angles de ce triangle;

$$\sin\theta = \frac{D}{2R\sqrt{PP'}}.$$

$$P = l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2ln\cos B - 2lm\cos C,$$
$$P' = l'^2 + m'^2 + n'^2 - 2m'n'\cos A - 2l'n'\cos B - 2l'm'\cos C.$$

Soient

$$\alpha_1 = 1, \qquad \alpha_2 = 1,$$
$$\beta_1 = -\cos C - \sin C\sqrt{-1}, \quad \beta_2 = -\cos C + \sin C\sqrt{-1},$$
$$\gamma_1 = -\cos B + \sin B\sqrt{-1}, \quad \gamma_2 = -\cos B - \sin B\sqrt{-1},$$

les coordonnées de deux points α_1 et α_2 (nécessairement à l'infini sur un cercle), on aura

$$P = (l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1)(l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2),$$
$$P' = (l'\alpha_1 + m'\beta_1 + n'\gamma_1)(l'\alpha_2 + m'\beta_2 + n'\gamma_2).$$

Supposons que les deux droites L et L′ soient représentées par l'équation unique

$$\varphi = A_{11}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 + A_{33}\gamma^2 + 2A_{12}\alpha\beta + 2A_{13}\alpha\gamma + 2A_{23}\beta\gamma = 0;$$

on aura

$$\tang\theta = \frac{\sqrt{-\nabla}}{RE}, \quad \nabla = \begin{vmatrix} a & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ b & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ c & A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ 0 & a & b & c \end{vmatrix} \quad (A_{rs} = A_{sr}),$$

$$E = A_{11} + A_{22} + A_{33} - 2A_{23}\cos A - 2A_{13}\cos B - 2A_{12}\cos C.$$

Équation de la droite perpendiculaire à L, menée par le point α'.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & l - m\cos C - n\cos B \\ \beta & \beta' & -l\cos C + m - n\cos A \\ \gamma & \gamma' & -l\cos B - m\cos A + n \end{vmatrix} = 0.$$

Distance du point α' à la droite L.

$$\delta = \frac{l\alpha' + m\beta' + n\gamma'}{\sqrt{P}}.$$

Distance des deux points α', α''.

Soit λ cette distance :

$$\lambda^2 = \frac{R^2}{S^2}[(\beta'\gamma'')^2 + (\alpha'\beta'')^2 + (\gamma'\alpha'')^2 - 2\cos A(\alpha'\beta'')(\gamma'\alpha'') - 2\cos B(\beta'\gamma'')(\alpha'\beta'') - 2\cos C(\beta'\gamma'')(\gamma'\alpha'')]$$

$$\lambda^2 = \frac{R^2}{S}[(\alpha' - \alpha'')^2\sin 2A + (\beta' - \beta'')^2\sin 2B + (\gamma' - \gamma'')^2\sin 2C]$$

$$\lambda^2 = \frac{R^2}{S^2}\begin{vmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B & \alpha'' & \alpha' \\ -\cos C & 1 & -\cos A & \beta'' & \beta' \\ -\cos B & -\cos A & 1 & \gamma'' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & 0 & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

En introduisant les points imaginaires α_1 et α_2, on a

$$\lambda^2 = \frac{R^2}{S^2} \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Si les points donnés sont situés sur la droite L, et qu'ils résultent de l'intersection de cette droite L avec deux autres L', L", on trouve

$$\lambda = 4\,RS \frac{\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix} \sqrt{P}}{\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ a & b & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l & m & n \\ l'' & m'' & n'' \\ a & b & c \end{vmatrix}}.$$

Si les droites L' et L" sont données par l'équation unique $\varphi = 0$, on aura

$$\lambda = 8\,RS \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & l \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & m \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \sqrt{P}}{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & a & l \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & b & m \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & c & n \\ a & b & c & 0 & 0 \\ l & m & n & 0 & 0 \end{vmatrix}} \qquad (A_{rs} = A_{sr}).$$

Sous cette forme, φ peut représenter une conique, λ est alors la partie de L comprise dans la conique.

Remarque. — L'équation de la droite L peut se mettre sous la forme

$$aa_1\alpha + bb_1\beta + cc_1\gamma = 0,$$

en désignant par a_1, b_1, c_1 les distances des sommets A, B, C du triangle de référence à cette droite. Toutes les formules précédentes deviennent d'une très-grande simplicité, en se donnant une droite, comme nous venons de l'indiquer. J'ai donné ces relations à la page 223 du tome XX des *Nouvelles Annales*.

Le Mémoire est suivi de diverses applications relatives aux propriétés métriques et descriptives des triangles, au rapport anharmonique, aux faisceaux homographiques, etc.

Je cite l'une d'elles. Le lieu d'un point, tel que ses distances α, β, γ aux trois côtés d'un triangle sont proportionnelles à une certaine puissance de ses côtés a, b, c, est donné par l'équation

$$\alpha^{\log\frac{c}{b}}\beta^{\log\frac{a}{c}}\gamma^{\log\frac{b}{a}} = 1.$$

COURBES DU SECOND ORDRE.

Soit $\varphi = 0$ l'équation d'une conique écrite sous la forme déjà indiquée; nous aurons à considérer les deux fonctions ∇ et E citées plus haut, et la fonction Δ définie par la relation

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons généralement par a_{rs} le coefficient de A_{rs} dans le développement du déterminant Δ.

L'espèce d'une conique se déduit des fonctions ∇ et E; on a :

Une hyperbole, si $\nabla < 0$;
Une ellipse, si $\nabla > 0$;
Une parabole, si $\nabla = 0$;

Une hyperbole équilatère, si $E = o$;

Un cercle, lorsque les coordonnées des points imaginaires α_1, α_2 vérifient l'équation $\varphi = o$.

Tangente au point α' de la conique.

$$\frac{d\varphi}{d\alpha'}\alpha + \frac{d\varphi}{d\beta'}\beta + \frac{d\varphi}{d\gamma'}\gamma = o,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \alpha & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \gamma & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ o & \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = o;$$

lorsque le point α' n'est pas sur la conique, les équations précédentes donnent la polaire du point α'.

Pôle d'une droïte L *par rapport à la conique* φ.

Soit α' ce pôle, on a

$$\alpha' = \frac{2S}{U}\frac{dU}{da} = \frac{2S}{U}(la_{11} + ma_{12} + na_{13}),$$

$$\beta' = \frac{2S}{U}\frac{dU}{db} = \frac{2S}{U}(la_{21} + ma_{22} + na_{23}),$$

$$\gamma' = \frac{2S}{U}\frac{dU}{dc} = \frac{2S}{U}(la_{31} + ma_{32} + na_{33}),$$

$$U = \begin{vmatrix} a & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ b & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ c & A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ o & l & m & n \end{vmatrix}.$$

Centre de la conique φ. — Dans les relations précédentes, il suffira de faire $l = a$, $m = b$, $n = c$. Les coor-

données du centre sont donc

$$\alpha' = \frac{2S}{\nabla}\frac{d\nabla}{da},$$

$$\beta' = \frac{2S}{\nabla}\frac{d\nabla}{db},$$

$$\gamma' = \frac{2S}{\nabla}\frac{d\nabla}{dc}.$$

CERCLE.

Équation du cercle qui a pour rayon ρ et le point α' pour centre.

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2\rho^2 = 4R^2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Elle se déduit immédiatement de la formule qui donne la distance de deux points. Elle fait voir que tous les cercles passent par les points imaginaires α_1, α_2 situés à l'infini, et que les deux déterminants du second membre égalés à o donnent les asymptotes du cercle.

Puissance du point α par rapport au cercle φ.

Soit ϖ cette puissance

$$\varpi = 2\frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{E}.$$

Rayon du cercle φ.

$$\rho^2 = -8S^2\frac{\Delta}{E\nabla}.$$

Cercle circonscrit au triangle ABC de référence.

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0, \quad E = -\frac{2S}{R}.$$

Cercle inscrit au triangle ABC.

$$\sqrt{\alpha}\cos\frac{1}{2}A + \sqrt{\beta}\cos\frac{1}{2}B + \sqrt{\gamma}\cos\frac{1}{2}C = 0, \quad E = \frac{p^2}{2R^2}.$$

Cercle qui touche le côté a et les prolongements des deux autres côtés.

$$\sqrt{\alpha}\cos\frac{1}{2}A + \sqrt{\beta}\sin\frac{1}{2}B + \sqrt{\gamma}\sin\frac{1}{2}C = 0.$$

Cercle décrit sur BC *comme diamètre.*

$$\alpha^2\cos A - \alpha\beta\cos B - \alpha\gamma\cos C - \beta\gamma = 0, \quad E = \frac{2S}{Ra}.$$

Les cercles décrits sur les autres côtés pris pour diamètres se déduiront de celui-ci par des permutations.

Cercle conjugué au triangle de référence.

Nous disons qu'un cercle est conjugué par rapport à un triangle lorsque le pôle de chaque côté du triangle coïncide avec le sommet opposé.

L'équation d'un tel cercle est

$$\alpha^2\sin 2A + \beta^2\sin 2B + \gamma^2\sin 2C = 0, \quad E = \frac{2S}{R^2}:$$

coordonnées du centre,

$$\alpha = 2R\cos B\cos C, \quad \beta = 2R\cos A\cos C, \quad \gamma = 2R\cos A\cos B.$$

C'est le point de rencontre des hauteurs du triangle.

Rayon. . . . . $\rho^2 = -4R^2\cos A\cos B\cos C.$

Cercle passant par les milieux des côtés du triangle de référence.

$$\frac{a^2}{-a\alpha+b\beta+c\gamma}+\frac{b^2}{a\alpha-b\beta+c\gamma}+\frac{c^2}{a\alpha+b\beta-c\gamma}=0,$$

$$\frac{a\cos A}{-\alpha\cos A+\beta\cos B+\gamma\cos C}+\frac{b\cos B}{\alpha\cos A-\beta\cos B+\gamma\cos C}$$
$$+\frac{c\cos C}{\alpha\cos A+\beta\cos B-\gamma\cos C}=0,$$

$$a\beta\gamma+b\alpha\gamma+c\alpha\beta$$
$$-R(\alpha^2\sin 2A+\beta^2\sin 2B+\gamma^2\sin 2C)=0,$$

$$a\beta\gamma+b\alpha\gamma+c\alpha\beta$$
$$-\frac{1}{2}(a\alpha+b\beta+c\gamma)(\alpha\cos A+\beta\cos B+\gamma\cos C)=0,$$

$$\alpha(-a\alpha+b\beta+c\gamma)\cos A$$
$$+\beta(a\alpha-b\beta+c\gamma)\cos B+\gamma(a\alpha+b\beta-c\gamma)\cos C=0$$

Ces différentes formes expriment autant de théorèmes.

Centre du cercle.

$$\alpha=\frac{R}{2}\cos(B-C),\quad \beta=\frac{R}{2}\cos(C-A),\quad \gamma=\frac{R}{2}\cos(A-B).$$

Équation des tangentes menées du point α' à la conique φ.

$$T=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta & \beta' & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \gamma & \gamma' & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & \alpha' & \beta' & \gamma' \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}=0,$$

$$T\Delta^2 = \begin{vmatrix} \alpha & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \gamma & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha' & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta' & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \gamma' & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \alpha & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \gamma & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}^2 = 0,$$

$$4T = 4\varphi(\alpha, \beta, \gamma)\varphi(\alpha', \beta', \gamma') - \left(\frac{d\varphi}{d\alpha'}\alpha + \frac{d\varphi}{d\beta'}\beta + \frac{d\varphi}{d\gamma'}\gamma\right)^2.$$

Équation des asymptotes de la conique φ.

On écrit, dans les équations précédentes, que α' est le centre de la conique. On trouve, pour les asymptotes, l'équation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) - \frac{\Delta}{\nabla}(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 = 0.$$

Angle formé par les tangentes menées du point α' *à la conique* φ.

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{2(a\alpha' + b\beta' + c\gamma')\sqrt{-\Delta\varphi(\alpha', \beta', \gamma')}}{RQ}.$$

$$Q = (a\alpha' + b\beta' + c\gamma')$$

$$\left[(a_{22} + a_{33} + 2a_{23}\cos A)\frac{\alpha'}{a} + (a_{11} + a_{33} + 2a_{13}\cos B)\frac{\beta'}{b} + (a_{11} + a_{22} + 2a_{12}\cos C)\frac{\gamma'}{c}\right]$$

$$- \frac{\nabla}{abc}(a\beta'\gamma' + b\alpha'\gamma' + c\alpha'\beta').$$

En posant $Q = 0$, on a le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique φ.

Angle formé par les asymptotes de la conique φ.

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sqrt{-\nabla}}{\mathrm{RE}}.$$

Somme des carrés des demi-axes principaux de la conique φ.

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = -a^2 b^2 c^2 \frac{\Delta \mathrm{E}}{\nabla^2}.$$

Produit des carrés des demi-axes principaux de la conique φ.

$$\mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 = \frac{a^4 b^4 c^4}{4\mathrm{R}^2} \frac{\Delta^2}{\nabla^3}.$$

Équation des axes principaux de la conique φ.

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{d\alpha} & \frac{dQ}{d\alpha} & a \\ \frac{d\varphi}{d\beta} & \frac{dQ}{d\beta} & b \\ \frac{d\varphi}{d\gamma} & \frac{dQ}{d\gamma} & c \end{vmatrix} = 0.$$

Q est le cercle défini ci-dessus.

Équation des directrices de la conique φ.

$$\nabla\varphi^2 - 4\mathrm{R}^2\mathrm{E}Q\varphi + 4\mathrm{R}^2Q^2 = 0.$$

Cette équation donne les quatre directrices : deux réelles données par l'équation

$$\Delta\varphi + \frac{\nabla}{4\mathrm{S}^2} Q\mathcal{A}^2 = 0;$$

deux imaginaires données par l'équation

$$\Delta\varphi + \frac{\nabla}{4\mathrm{S}^2} Q\mathcal{B}^2 = 0.$$

On voit aisément, d'après les valeurs de $\mathcal{A}^2$ et de $\mathcal{B}^2$, que le produit de ces deux équations donne la première.

En appliquant ces résultats généraux aux cas particuliers des coniques inscrites, circonscrites ou conjuguées au triangle de référence, on obtient divers théorèmes qui font le sujet de questions dans les *Nouvelles Annales*.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 317 (*);

(voir t. XV, p. 52, ou 2e série, t. II, p 227);

PAR M. E. FONTANEAU,
Ancien officier de Marine.

On donne sur un plan : 1° *une conique* S, 2° *cinq points fixes a, b, c, d,* P, *dont l'un a est pris sur le périmètre de la conique. On propose de mener par le point* P *une transversale qui coupe la conique en deux points réels ou imaginaires* ε, φ *situés avec les quatre a, b, c, d sur une même conique.* (DE JONQUIÈRES.)

La solution de ce problème repose sur les deux lemmes suivants :

1. Si, par un point fixe P, on mène une infinité de droites, elles déterminent, par leurs intersections avec une conique, deux séries de points qui sont en involution sur la courbe, c'est-à-dire qui sont tels, qu'en joignant chacun d'eux à un point quelconque de la conique fixe, on a deux faisceaux en involution (*Mélanges de Géométrie,* p. 159).

(*) C'est par erreur que cette question a été indiquée comme non résolue page 227. (*Voir* t. XX, p. 342.)

2. Si, par deux points du plan et deux points pris sur une conique, on fait passer une série de courbes du second ordre, elles détermineront par leurs intersections avec la conique fixe deux séries de points qui seront en involution sur cette courbe.

De ces deux lemmes résultent les corollaires suivants :

1° Si, par deux points du plan et deux points pris sur une conique, on fait passer une série de courbes du second ordre, leurs deuxièmes cordes d'intersection avec la conique fixe passeront toutes par un même point.

2° Si, par un point pris dans le plan d'une conique, on fait passer une infinité de droites, puis si, par les deux points variables d'intersection de chacune d'elles avec la courbe et trois points dont un ou deux sont pris sur la conique fixe, on fait passer une série de courbes du second ordre, ces coniques variables se couperont toutes en un même point, qui sera sur la conique fixe, si un seul des trois points fixes a été pris sur cette courbe. De ces propositions résulte la solution demandée.

Par le point P on mènera une corde à la conique S; par les deux extrémités de cette corde e, f, le point a et deux des trois points b, c, d, on fera passer une conique (e, f, a, b, c, par exemple); on cherchera le quatrième point d'intersection M de cette courbe du second ordre avec la conique S; par ce point M et les quatre a, b, c, d, on fera passer une troisième conique Σ dont les intersections ε, φ avec la courbe S seront les points demandés.

En effet, d'après le corollaire 2, toutes les coniques (e, f, a, b, c) passent par le point M lorsque la corde Pef varie, et, d'après le corollaire 1, toutes les cordes ef d'intersection des coniques (a, b, c, M) avec la courbe S passent par le point P; donc la corde ($\varepsilon\varphi$) d'intersection

de la courbe du second ordre (a, b, c, d, M) avec la conique S passe par ce point P.

On sait que toutes ces constructions peuvent s'effectuer avec la règle et le compas.

Comme on peut combiner les trois points b, c, d deux à deux de trois manières différentes, il en résulte qu'il y a en général trois solutions et non pas deux, comme il est dit par erreur dans l'énoncé du problème.

Ce mode de solution s'applique à tous les problèmes analogues, parmi lesquels je citerai le suivant :

On donne une droite fixe L *et huit points* a, b, c, d *et* a', b', c', d'; *déterminer deux coniques* ($abcd$) *et* ($a'b'c'd'$) *qui aient la droite* L *pour axe de symptose.*

REMARQUES AU SUJET DE LA QUESTION 654;

PAR M. EUGÈNE BELTRAMI.

L'énoncé de cette question est le suivant :

Démontrer que, si $\varphi(2\omega) = \varphi(\omega):\cos\omega$, *on aura* $\varphi(\omega) = \varphi(0).\dfrac{\sin\omega}{\omega}$.

La solution indiquée dans cet énoncé n'est pas, à beaucoup près, la plus générale que comporte la question. C'est ce qui ressortira de l'analyse suivante, dans laquelle je supposerai d'abord, pour plus de clarté, que la variable ω se maintienne toujours réelle et positive.

Si l'on multiplie l'équation proposée par $2\sin\omega$, qu'on mette le résultat sous la forme

$$2\frac{\varphi(2\omega)}{\sin 2\omega} = \frac{\varphi(\omega)}{\sin\omega},$$

et qu'on pose

$$\frac{\varphi(\omega)}{\sin \omega} = \psi(\omega), \tag{1}$$

on aura à résoudre l'équation suivante, plus simple que la proposée,

$$2\psi(2\omega) = \psi(\omega). \tag{2}$$

En changeant successivement dans celle-ci ω en 2ω, $4\omega, \ldots, 2^{m-1}\omega$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\psi(4\omega) &= \psi(2\omega), \\ 2\psi(8\omega) &= \psi(4\omega), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 2\psi(2^m\omega) &= \psi(2^{m-1}\omega), \end{aligned}$$

et, en multipliant toutes ces équations entre elles et avec l'équation (2), il vient

$$2^m\psi(2^m\omega) = \psi(\omega) \tag{3}$$

Ici m est un nombre entier et positif; mais si l'on remplace dans cette formule ω par $2^{-n}\omega$, où n est un nombre entier et positif moindre que m, on trouve

$$2^m\psi(2^{m-n}\omega) = \psi(2^{-n}\omega);$$

d'un autre côté, en changeant dans la même formule m en $m - n$, il résulte

$$2^{m-n}\psi(2^{m-n}\omega) = \psi(\omega):$$

donc l'équation (3) subsiste pour toute valeur entière, positive ou négative de m.

D'après cette même équation (3), la valeur de la fonction $2^m\psi(2^m\omega)$ est toujours égale, tant que m est un nombre entier, à celle que cette fonction reçoit pour $m = 0$. Par suite, la valeur générale de cette fonction, c'est-à-dire

celle qui répond à une valeur quelconque rationnelle ou irrationnelle de m, que je désignerai par μ, doit se réduire à $\psi(\omega)$ pour toute valeur entière de μ. Je pose donc

$$2^\mu \psi(2^\mu \omega) = \psi(\omega).\cos 2h\pi\mu + F(\mu, \omega).\sin k\pi\mu,$$

où h et k sont deux nombres entiers quelconques, et où $F(\mu, \omega)$ est une fonction qui ne devient pas infinie pour des valeurs entières de μ. De cette équation, en faisant $\omega = 1$, on tire

$$2^\mu \psi(2^\mu) = \psi(1) \cos 2h\pi\mu + F(\mu).\sin k\pi\mu,$$

où l'on a écrit $F(\mu)$ à la place de $F(\mu, 1)$. Enfin, en posant

$$2^\mu = \omega,$$

d'où

$$\mu = \frac{\log \omega}{\log 2},$$

et écrivant, d'après l'équation (1), $\frac{\varphi(1)}{\sin 1}$ à la place de $\psi(1)$, on a

$$\psi(\omega) = \frac{\varphi(1)}{\omega \sin 1} \cos \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} + F_1(\omega).\sin \frac{k\pi \log \omega}{\log 2},$$

où

$$F_1(\omega) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{\log \omega}{\log 2}\right).$$

La fonction $F_1(\omega)$ n'est point arbitraire. En effet, si, dans l'équation précédente, on change ω en 2ω, on obtient

$$2\psi(2\omega) = \frac{\varphi(1)}{\omega \sin 1} \cos \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} + 2F_1(2\omega).\sin \frac{k\pi \log \omega}{\log 2}(-1)^k,$$

et par suite, d'après l'équation (2),

$$2F_1(2\omega) = (-1)^k.F_1(\omega).$$

Si donc on prend pour k un nombre pair $2k$, on aura,

pour $\psi(\omega)$, la valeur

$$(5)\quad \psi(\omega) = \frac{\varphi(1)}{\omega \sin 1} \cdot \cos \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} + F_1(\omega) \cdot \sin \frac{2k\pi \log \omega}{\log 2},$$

et pour $F_1(\omega)$, l'équation

$$(6)\qquad 2F_1(2\omega) = F_1(\omega).$$

Cette dernière équation, étant absolument de même forme que l'équation (2), donnera, de la même manière,

$$F_1(\omega) = \frac{F_1(1)}{\omega \sin 1} \cos \frac{2h'\pi \log \omega}{\log 2} + F_2(\omega) \cdot \sin \frac{2k'\pi \log \omega}{\log 2},$$

et, pour la fonction $F_2(\omega)$, on aura de nouveau

$$F_2(\omega) = \frac{F_2(1)}{\omega \sin 1} \cdot \cos \frac{2h''\pi \log \omega}{\log 2} + F_3(\omega) \cdot \sin \frac{2k''\pi \log \omega}{\log 2};$$

et ainsi de suite.

En substituant successivement ces valeurs les unes dans les autres et dans les équations (5) et (2), on trouvera enfin

$$\varphi(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega \sin 1}$$

$$\times \left[\varphi(1) \cos \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} + F_1(1) \sin \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} \cos \frac{2h'\pi \log \omega}{\log 2} \right.$$
$$\left. + F_2(1) \sin \frac{2k\pi \log \omega}{\log 2} \sin \frac{2k'\pi \log \omega}{\log 2} \cos \frac{2h''\pi \log \omega}{\log 2} + \ldots \right].$$

Or, on voit assez clairement que l'ensemble des termes renfermés dans les parenthèses, à raison de la valeur entièrement arbitraire qu'on peut attribuer à chacune des constantes

$$\varphi(1),\quad F_1(1),\quad F_2(1), \ldots,$$
$$h,\quad h',\quad h'', \ldots,$$
$$k,\quad k',\quad k'', \ldots,$$

dont le nombre est indéterminé, peut être censé représenter une fonction quelconque des deux quantités

$$\sin\frac{2\pi\log\omega}{\log 2},\quad \cos\frac{2\pi\log\omega}{\log 2},$$

ou même d'une seule d'entre elles, ce qui ne diminue point la généralité de cette fonction. En désignant donc celle-ci par

$$\Theta\left(\sin\frac{2\pi\log\omega}{\log 2},\quad \cos\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}\right),$$

on pourra poser

$$(7)\qquad \varphi(\omega)=\frac{\sin\omega}{\omega}\,\Theta\left(\sin\frac{2\pi\log\omega}{\log 2},\quad \cos\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}\right).$$

D'après la manière dont cette formule a été obtenue, ω y entre comme une quantité positive; mais, si l'on se reporte à l'équation proposée, on voit facilement que la valeur de $\varphi(\omega)$ donnée ci-dessus ne cesse de satisfaire à cette équation quand on donne à ω des valeurs négatives ou même imaginaires; car les formules

$$\sin 2u = 2\sin u\cos u,\quad \log uv = \log u + \log v$$

continuent d'avoir lieu quand u et v deviennent imaginaires, ainsi que l'a démontré Cauchy (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV), pourvu que l'on adopte des définitions convenables pour ces fonctions, quand la variable devient imaginaire. On peut donc regarder la formule (7) comme étant applicable à tous les cas.

Si l'on suppose que la fonction Θ se réduise à une simple constante arbitraire, et si l'on remarque que cette constante représente alors la valeur que la fonction reçoit pour $\omega = 0$, on obtient, comme cas particulier de la for-

mule (7), la solution indiquée dans l'énoncé de la question.

Note. — Pourquoi les méthodes employées (p. 285 et 286) n'ont-elles conduit qu'à une solution particulière ? P.

LIEU DES SOMMETS DES CONES DU SECOND DEGRÉ QUI PASSENT PAR SIX POINTS DONNÉS;

PAR M. POUDRA.

Cherchons d'abord l'équation de la surface conique qui passerait par cinq points 1, 2, 3, 4, 5 donnés et aurait pour sommet un point t.

Soient :

$a=0$ l'équation du plan passant par les trois points			$1, 2, t$,
$b=0$	»	»	$2, 3, t$,
$c=0$	»	»	$1, 4, t$,
$d=0$	»	»	$3, 4, t$,

alors l'équation

$$a.d-\lambda.b.c=0$$

est celle du cône du second degré, ayant le point t pour sommet, et passant par les quatre arêtes d'intersection dont les équations sont :

$$a=0\left\{\begin{array}{l}b=0,\\c=0,\end{array}\right.\quad\text{et}\quad d=0\left\{\begin{array}{l}b=0,\\c=0.\end{array}\right.$$

Cette équation du cône renferme une indéterminée λ qui servira à faire passer ce cône par le point 5 donné. Pour cela, appelons a', b', c', d' ce que deviennent respective-

ment a, b, c, d, lorsqu'à la place de x, y, z que ces polynômes renferment, on y met les valeurs des coordonnées de ce cinquième point. On aura donc

$$a'.d' - \lambda.b'.c' = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{a'.d'}{b'.c'},$$

et, par suite,

$$(1) \qquad a.d.b'.c' - a'.d'.b.c = 0.$$

Telle est donc l'équation de la surface conique, ayant le point t pour sommet et passant par les cinq points donnés 1, 2, 3, 4, 5.

Si maintenant ce cône doit passer par le point 6, il faudra que les coordonnées de ce point 6 satisfassent à l'équation (1). Soient a'', b'', c'', d'' ce que deviennent respectivement a, b, c, d lorsqu'à la place de x, y, z, on substitue dans ces polynômes, pour x, y, z, les coordonnées du point 6; alors on doit avoir

$$(2) \qquad a''.d''\ b'.c' - a'.d'.b''.c'' = 0.$$

Dans cette équation, les coefficients sont des fonctions des coordonnées des différents points 1, 2, 3, 4, 5, 6 et de celles du sommet t que nous pouvons désigner par x', y', z', et chacune entre au premier degré dans chaque facteur a'', d'', b', c', a', d', b'', c''.

Or, dans cette équation (2), on peut regarder les coordonnées x', y', z' du sommet comme étant les variables, et alors elle représentera le lieu des sommets des cônes du second degré qui passent par les six points donnés.

Cette équation sera évidemment du quatrième degré en x', y', z'; ainsi le lieu des sommets des cônes du second degré qui passent par six points quelconques donnés est une surface du quatrième degré, dont l'équa-

tion est

$$a''.d''.b'.c' - a'.d'.b'' c'' = 0.$$

Dans cette équation, il est évident que $a' = 0$ est l'équation du plan qui passe par les trois points 1, 2, 5; $b' = 0$ du plan 2, 3, 5; $c' = 0$ de 1, 4, 5; $d' = 0$ de 3, 4, 5; et $a'' = 0$ de 1, 2, 6; $b'' = 0$ de 2, 3, 6; $c'' = 0$ de 1, 4, 6; $d'' = 0$ de 3, 4, 6.

Donc cette surface du quatrième degré passe par les seize droites dont les équations seraient :

$$a'' = 0 \text{ avec} \begin{cases} a'' = 0, \\ d' = 0, \\ b'' = 0, \\ c'' = 0; \end{cases} \qquad d'' = 0 \text{ avec} \begin{cases} a' = 0, \\ d' = 0, \\ b'' = 0, \\ c'' = 0; \end{cases}$$

$$b' = 0 \text{ avec} \begin{cases} a' = 0, \\ d' = 0, \\ b'' = 0, \\ c'' = 0; \end{cases} \qquad c' = 0 \text{ avec} \begin{cases} a' = 0, \\ d' = 0, \\ b'' = 0, \\ c'' = 0; \end{cases}$$

qui sont quatre à quatre dans un même plan. Douze de ces droites sont celles qui joignent deux à deux les six points donnés et qui sont 12, 26, 16, 43, 36, 46, 25, 35, 23, 15, 45, 14; et ensuite les quatre droites

$$\begin{cases} a'' = 0, \\ d' = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} d'' = 0, \\ a' = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} b' = 0, \\ c'' = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} b'' = 0, \\ c' = 0. \end{cases}$$

Si, au lieu de partir des points 1, 2, 3, 4, nous eussions pris quatre autres des points donnés, nous aurions dû arriver à l'équation de la même surface; donc cette équation doit être satisfaite :

1° Par toutes les droites qui joignent deux à deux les six points donnés et qui sont au nombre de 15.

2° Par toutes les droites qui résultent des intersections de tous les plans qui passent par trois points différents, et

pris deux à deux; or ces six points pris trois à trois donnent $\frac{6.5.4}{2.3} = 20$, d'où résultent six droites qui doivent faire partie de la surface.

Ainsi le total de ces droites qui sont sur cette surface est de 25. On conçoit très-bien que le lieu des sommets des cônes du second degré qui passent par six points doit contenir toutes les droites qui joignent deux à deux ces six points; car si, sur une de ces droites, on prend un point quelconque pour sommet d'un cône du second degré passant par les cinq autres points, il passera bien par les six.

Pour concevoir comment les autres droites désignées ci-dessus font partie de la surface, il faut remarquer que deux plans quelconques peuvent être considérés comme formant, à eux deux, un cône du second degré, dont un point quelconque de leur intersection commune est le sommet : alors on conçoit comment les dix dernières droites ci-dessus sont sur la surface.

Le problème que nous venons de résoudre conduit à la solution de cette question : *Trouver les points qui seraient les sommets de trois cônes du second degré passant respectivement par trois groupes de six points donnés dans l'espace.* Ces points seront les intersections de trois surfaces du quatrième ordre; par conséquent ils seront au nombre de $4.4.4 = 64$. Il donne aussi la solution de ce problème : *Trouver le lieu des sommets des cônes du second degré qui passent par sept points de l'espace*, et par suite de ce problème : *Trouver les sommets de ces cônes qui passent par huit points donnés.*

La méthode employée ci-dessus pour déterminer le lieu d'un point peut servir dans une infinité de cas.

CAUSTIQUES. — CENTRE DE JONCTION;

PAR M. A. CORNU,
Elève-Ingénieur des Mines.

Depuis l'ingénieuse méthode de M. Quételet, le problème des caustiques est théoriquement ramené à une question plus simple, puisqu'on obtient immédiatement une développante de la caustique : mais la difficulté inhérente à la construction par points d'une développée subsiste toujours. C'est la détermination dans le cas général du point de contact du rayon lumineux avec son enveloppe ou la construction par points d'une caustique qui va faire l'objet de cette Note.

Beaucoup de solutions ont été déjà données sur ce problème. Celle qui suit s'appuie sur la considération d'un point (centre de jonction) dont les propriétés n'ont peut-être pas été remarquées, et qui, en tout cas, méritent quelque attention.

La formule bien connue

$$(1)\qquad \frac{1}{\rho}(\cos i - n\cos r) = \frac{\cos^2 i}{a} - \frac{n\cos^2 r}{b},$$

et facile à démontrer géométriquement par des constructions infinitésimales, permet de calculer la distance b du point de la caustique comptée à partir du point d'incidence, en fonction :

1° De la distance a du point lumineux au point d'incidence;

2° Du rayon de courbure ρ de la courbe dirimante;

3° Des angles d'incidence et de réfraction i, r;

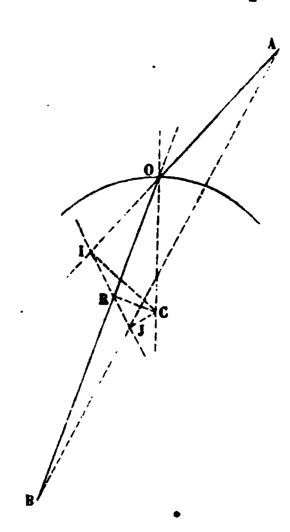
4° De l'indice de réfraction $n = \dfrac{\sin i}{\sin r}$.

Nous allons en déduire le théorème suivant.

Considérons dans le plan d'une courbe dirimante un point lumineux, un rayon qui en émane et le rayon réfracté correspondant : si le point lumineux se meut sur le rayon incident, le point de la caustique qui lui correspond sur le rayon réfracté se déplace de telle sorte que la droite qui les joint passe par un point fixe.

Ce point, que nous nommerons *centre de jonction*, est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de courbure au point d'incidence sur la droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées du même point sur les rayons incident et réfracté.

Joignons le point lumineux A au point correspondant



de la caustique B : soient $OA = a$, $OB = b$. Cette droite, rapportée aux deux axes OA, OB, aura pour équation

$$(2) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

dont les paramètres $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ sont liés par la formule (1). Comme ces paramètres entrent linéairement dans les deux équations, la droite AB passe par un point fixe.

En effet, éliminons l'un des deux paramètres, par exemple $\frac{1}{b}$, entre les équations précédentes; pour cela, additionnons-les membre à membre après avoir multiplié la première par y et la seconde par $-n\cos^2 r$: il vient

$$\frac{y}{\rho}(\cos i - n\cos r) - \frac{nx\cos^2 r}{a} = \frac{y\cos^2 i}{a} - n\cos^2 r,$$

ou bien

$$\frac{y}{\rho}(\cos i - n\cos r) + n\cos^2 r = \frac{1}{a}(x.n\cos^2 r + y\cos^2 i),$$

équation satisfaite indépendamment de $\frac{1}{a}$ si l'on pose

$$\frac{y}{\rho}(\cos i - n\cos r) + n\cos^2 r = 0,$$
$$xn\cos^2 r + y\cos^2 i = 0.$$

La droite représentée par l'équation (2) passe donc toujours par le point d'intersection des droites représentées par les deux dernières équations. Substituant à n sa valeur $\frac{\sin i}{\sin r}$ et résolvant par rapport à x et à y, nous obtiendrons les coordonnées de ce point fixe que nous appellerons *centre de jonction*

$$x = -\rho\frac{\sin r\cos^2 i}{\sin(i-r)}, \tag{3}$$

$$y = +\rho\frac{\sin i.\cos^2 r}{\sin(i-r)}. \tag{4}$$

Toute combinaison de ces deux valeurs donnera une droite passant par le centre de jonction.

1° Divisons l'équation (3) par $\rho \cos i$, l'équation (4) par $\rho \cos r$, et ajoutons l'équation (3) à l'équation (4), il vient

$$(5) \qquad \frac{y}{\rho \cos r} + \frac{x}{\rho \cos i} = 1;$$

$\rho \cos r$ et $\rho \cos i$ sont les distances à l'origine des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de courbure sur les axes. Le centre de jonction se trouve donc sur la droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées du centre de courbure sur les deux rayons.

2° Multiplions l'équation (3) par $\sin r$, l'équation (4) par $\sin i$, et ajoutons l'équation (3) à l'équation (4), il vient, après simplifications,

$$y \sin i + x \sin r = \frac{\cos^2 r - \cos^2 i}{\sin(i - r)},$$

équation vérifiée par les coordonnées du centre de courbure

$$x_1 = -\frac{\rho \sin r}{\sin(i - r)}, \quad y_1 = \frac{\rho \sin i}{\sin(i - r)}.$$

De plus, la droite représentée par cette équation est perpendiculaire à la droite (5), car les coefficients angulaires

$$m = -\frac{\cos r}{\cos i}, \quad m' = -\frac{\sin r}{\sin i},$$

satisfont à la relation de perpendicularité dans le cas des axes obliques

$$1 + mm' + (m + m') \cos \theta = 0.$$

Ici $\theta = (i - r)$.

Donc, pour construire le centre de jonction, on abaissera du centre de courbure trois perpendiculaires :

1° Sur le rayon incident;

2° Sur le rayon réfracté;

3° Sur la droite qui joint les pieds de ces deux perpendiculaires. Le pied de la troisième perpendiculaire sera le centre de jonction.

Dans le cas des caustiques par réflexion, la construction se simplifie, parce que $r = -i$.

APPLICATIONS.

CONSTRUCTION DIRECTE. — 1° *Construire par points la caustique par réfraction d'un cercle.* — Comme cette caustique est la développée d'un ovale de Descartes, on obtient ainsi le centre de courbure de cette ligne. (*Voir* Salmon, *Higher plane Curves.*)

2° *Caustique d'une droite par réfraction.*—C'est une conique. Dans ce cas le centre de jonction est à l'infini comme le centre de courbure de la droite; mais on reconnaît aisément qu'en faisant varier le rayon de courbure d'une ligne dirimante quelconque, le centre de jonction décrit une droite passant au point d'incidence; on construit un second point de cette droite, et c'est par une parallèle menée par le point lumineux qu'on détermine la caustique.

3° *Caustique par réflexion d'un cercle.*— Développée d'un limaçon de Pascal. Même conclusion relativement à la construction du centre de courbure de cette ligne.

CONSTRUCTION INVERSE. — Étant connue la caustique, déterminer la courbure de la ligne dirimante.

1° Déterminer le centre de courbure des coniques en considérant un foyer comme la caustique par réflexion de l'autre foyer.

2° Même problème pour l'ovale de Descartes. Solution très-simple.

En général, on construira donc les développées des lignes dont la définition se ramènera à celle d'une déve-

loppante de caustique ou dont une caustique particulière sera connue.

Pour compléter l'étude du centre de jonction, nous indiquerons sommairement quelques lieux géométriques que décrit ce point dans différentes circonstances.

Caustiques planes : lieu des positions du centre de jonction quand varie l'un des trois éléments, courbure, indice, incidence.

1° Quand la courbure varie au point d'incidence, nous avons dit que le lieu est une droite; de cette propriété on déduit la construction de la caustique quand le rayon de courbure à l'incidence est infini.

2° Quand l'indice varie, le lieu est évidemment un cercle; car le rayon AO restant fixe et le rayon incident tournant autour du point d'incidence O, la droite IR qui joint le pied des perpendiculaires abaissées du centre de courbure tourne autour du point fixe I, et le centre de jonction J est le sommet d'un angle droit mobile dont les côtés passent respectivement par des points fixes I, C.

3° Quand l'indice varie, le lieu n'est plus aussi connu; c'est cependant une courbe très-intéressante, dont on construit assez simplement la normale et même la développée. Elle est du sixième degré; mais son équation en coordonnées polaires s'obtient sans difficulté en prenant pour axe polaire la normale au point d'incidence, et pour pôle le centre de courbure

$$R = \rho . n . \frac{\sin^2 \omega}{n^2 + 2n \cos \omega + 1}.$$

La courbe ressemble à un système de deux ellipses tangentes à l'axe polaire au point origine; l'aire d'une de ses boucles a pour valeur $\frac{3}{16} \pi \left(\frac{\rho}{n}\right)^2$.

On peut étendre ces considérations aux surfaces diri-

mantes; mais il n'y a pas de généralisation immédiate, parce qu'on est toujours ramené aux courbes planes, le rayon réfracté étant dans le plan d'incidence.

Le seul point à examiner est le lieu que décrit le centre de jonction quand le rayon incident décrit un cône de révolution autour de la normale. C'est une courbe gauche, intersection de deux cylindres du second degré, ayant des relations très-simples avec les plans principaux et avec l'indicatrice au point d'incidence.

Nous nous bornerons à ces indications, que le lecteur complétera facilement si ce genre de recherches lui présente de l'utilité ou de l'intérêt.

SUR LES POLYGONES SEMI-RÉGULIERS INSCRITS A L'ELLIPSE;

PAR M. ABEL TRANSON.

J'appelle *polygone semi-régulier inscrit à l'ellipse* un polygone tel, que les triangles, ayant les différents côtés pour leurs bases avec leurs sommets au centre de la courbe, sont équivalents. Ainsi, un tel polygone est toujours la projection d'un polygone régulier circulaire; mais, tandis que dans le cercle un polygone régulier est complétement déterminé de forme par le nombre de ses côtés, il est évident que la forme du polygone semi-régulier elliptique dépend à la fois du nombre de ses côtés et en même temps de sa situation sur le plan de la courbe. Toutefois les polygones d'un même nombre de côtés inscrits dans une même ellipse jouissent d'une propriété commune dont voici l'énoncé :

THÉORÈME. *Soient* R_1, R_2, R_3,..., R_n *les rayons de courbure de l'ellipse aux différents sommets d'un poly-*

gone semi-régulier; la moyenne arithmétique des quantités $(\mathrm{R}_1)^{\frac{2}{3}}$, $(\mathrm{R}_2)^{\frac{2}{3}}, \ldots,$ $(\mathrm{R}_n)^{\frac{2}{3}}$ *est indépendante de la situation particulière du polygone.*

Pour la démonstration de ce théorème, il convient d'employer comme variable indépendante l'angle qui reçoit, dans la théorie du mouvement elliptique des planètes, le nom d'*anomalie excentrique*. Si on le représente par u, les coordonnées d'un point de l'ellipse sont exprimées par

$$x = a\cos u, \quad y = b\sin u;$$

et par suite le rayon de courbure dont la valeur est

$$\mathrm{R} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$$

prend la forme

$$\mathrm{R} = \frac{(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Or, d'après la signification géométrique de l'anomalie excentrique, les valeurs de u qui répondent aux sommets d'un polygone semi-régulier de n côtés croissent selon une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$. Donc, si u est l'anomalie qui correspond à un premier sommet et $u + x$ celle qui se rapporte à un autre sommet quelconque, on a pour x une des n valeurs de $\frac{2m\pi}{n}$, où m est un des nombres entiers depuis 1 jusqu'à n. De plus, en vertu de la formule précédente, on a

$$(ab\,\mathrm{R}_x)^{\frac{2}{3}} = a^2\sin^2(u + x) + b^2\cos^2(u + x),$$

ou bien

$$(ab\,R_x)^{\frac{2}{3}} = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u + (a^2 - b^2)(\sin^2 u - \cos^2 u)\cos^2 x$$
$$+ \frac{a^2 - b^2}{2}\sin 2u . \sin 2x .$$

Pour calculer la somme des n valeurs du premier membre, il faut connaître la somme des valeurs de $\cos^2 x$ et celle des valeurs de $\sin^2 x$. Or, comme on a

$$nx = 2m\pi,$$

c'est-à-dire

$$\cos nx = 1,$$

on a donc aussi

$$1 = \cos^n x - \frac{n . n - 1}{1 . 2}\cos^{n-2} x \sin^2 x$$
$$+ \frac{n . n - 1 . n - 2 . n - 3}{1 . 2 . 3 . 4}\cos^{n-4} x \sin^{n-4} x - \ldots ;$$

car le second membre est l'expression connue de $\cos nx$. Si l'on y remplace $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ et qu'on ordonne par rapport aux puissances de $\cos x$, en ne retenant que les deux premiers termes, il viendra

$$2^{n-1}\cos^n x - n . 2^{n-3}\cos^{n-2} x + \ldots = 0 ;$$

d'après quoi il est aisé de voir que $\Sigma \cos^2 x$ est égal à $\frac{n}{2}$. Quant à $\Sigma \sin 2x$, il est manifestement nul. D'après cela, on trouvera aisément

$$(ab)^{\frac{2}{3}} \sum_1^n (R_x)^{\frac{2}{3}} = \frac{n}{2}(a^2 + b^2),$$

et par suite

$$\frac{1}{n}\sum_1^n (R_x)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right].$$

C'est précisément ce qu'il fallait démontrer ; mais il se trouve établi en outre que *la moyenne arithmétique des quantités* $(R_x)^{\frac{2}{3}}$ *est indépendante aussi du nombre des côtés du polygone semi-régulier.*

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. TCHÉBYCHEW;

PAR M. S. REALIS,
Ingénieur à Turin.

---

1. Le théorème de M. Tchébychew, qui figure dans les *Nouvelles Annales* parmi les propositions à démontrer (*voir* t. XV, question 347, et t. XVI, question 356; *voir* aussi le *Bulletin mathématique* pour 1860, p. 52), consiste en ce que, *dans une équation algébrique* (à coefficients réels) *de la forme*

$$x^{2n+1} + ax^{2n-1} + bx^{2n-3} + \ldots + hx + k = 0,$$

qui ne renferme que des puissances impaires de l'inconnue et le terme tout connu, il y a toujours au moins une racine réelle comprise entre $+2\sqrt[2n+1]{\frac{k}{2}}$ et $-2\sqrt[2n+1]{\frac{k}{2}}$.

Une démonstration de ce théorème, fondée sur la considération des propriétés d'une courbe transcendante, a été insérée par M. de Foville (*) dans ce même recueil (t. XVII), mais elle ne tient pas directement aux théories ordinaires de l'Algèbre.

Voici comment on peut établir la vérité de cette proposition, en ne s'appuyant que sur les principes généraux de l'analyse des équations.

(*) Aujourd'hui élève-ingénieur des Mines. P.

2. J'observerai d'abord que la démonstration ne perd pas de sa généralité en supposant dans l'équation donnée $h = 2$, car, en remplaçant l'inconnue x par $x\sqrt[2n+1]{\frac{k}{2}}$, on obtient une équation de même forme que la proposée et ayant le dernier terme égal à 2; en sorte que l'énoncé ci-dessus revient à dire que, *dans l'équation*

$$(1)\qquad x^{2n+1} + ax^{2n-1} + bx^{2n-3} + \ldots + hx + 2 = 0,$$

il y a au moins une racine réelle comprise entre $+2$ *et* -2.

Cela posé, considérons l'équation réciproque

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} Y = y^{4n+2} + Ay^{4n} + By^{4n-2} + \ldots + 2y^{2n+1} + \ldots \\ \qquad + By^4 + Ay^2 + 1 = 0, \end{array}\right.$$

ne contenant que des puissances paires de l'inconnue, à l'exception du terme du milieu $2y^{2n+1}$. Nous pourrons toujours, à l'aide d'équations de premier degré, déterminer les coefficients A, B,..., de cette équation de manière que l'équation de degré $2n+1$ en x, que l'on obtient en faisant $y + \frac{1}{y} = x$, conformément à la méthode d'abaissement des équations réciproques, coïncide avec la proposée.

On voit dès à présent que le théorème en question se trouvera démontré, si l'on prouve que l'équation (2) admet toujours au moins un couple de racines imaginaires dont le module soit égal à l'unité, c'est-à-dire qu'elle admet au moins un facteur réel du second degré de la forme $y^2 + xy + 1$, x étant moindre que 2 (en valeur absolue).

3. Prouvons d'abord que l'équation réciproque (2) admet des racines imaginaires. Il suffit, pour cela, de remarquer que, si toutes les racines sont réelles, en dési-

gnant par y_1, y_2, y_3,..., y_{2n+1} celles que l'on regarde comme indépendantes l'une de l'autre, et conséquemment par $\frac{1}{y_1}$, $\frac{1}{y_2}$, $\frac{1}{y_3}$,..., $\frac{1}{y_{2n+1}}$ leurs réciproques respectives, on doit pouvoir décomposer le premier membre Y en deux facteurs réels de degré $2n+1$, dont l'un, que nous indiquerons par

$$Y_1 = y^{2n+1} + a_1 y^{2n} + a_2 y^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1} y^2 + a_{2n} y + a_{2n+1},$$

soit le produit des facteurs $y - y_1$, $y - y_2$, $y - y_3$,..., $y - y_{2n+1}$, et l'autre

$$Y_2 = y^{2n+1} + \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} y^{2n} + \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} y^{2n-1} + \ldots$$
$$+ \frac{a_2}{a_{2n+1}} y^2 + \frac{a_1}{a_{2n+1}} y + \frac{1}{a_{2n+1}}$$

soit le produit des facteurs $y - \frac{1}{y_1}$, $y - \frac{1}{y_2}$, $y - \frac{1}{y_3}$,..., $y - \frac{1}{y_{2n+1}}$. Or, comme dans le produit $Y_1 Y_2$ le coefficient du terme du milieu y^{2n+1} est

$$a_{2n+1} + \frac{1}{a_{2n+1}} + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2n-1}^2 + a_{2n}^2}{a_{2n+1}},$$

et a toujours une valeur numérique plus grande que 2, il est impossible que le polynôme Y, où le coefficient de y^{2n+1} est 2, soit le produit des polynômes Y_1 et Y_2 dont tous les coefficients sont réels.

Maintenant il est facile de voir que, dès que l'équation (2) ne saurait avoir toutes ses racines réelles, il faut nécessairement que, parmi ses racines imaginaires, il y en ait au moins deux conjuguées qui soient réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire qui constituent un couple ayant l'unité pour module.

Considérons en premier lieu le cas où toutes les racines

sont imaginaires. A chaque couple $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, il correspondra le couple réciproque $\frac{1}{\alpha \pm \beta \sqrt{-1}}$, en sorte que, si aucun module n'est égal à l'unité, le nombre des racines devrait être un multiple de 4. Cela est impossible, le degré de l'équation étant $4n+2$; d'où l'on conclut nécessairement que, puisqu'il n'y a pas de racines réelles, un de ces couples sera tel, que l'on ait

$$\alpha \pm \beta \sqrt{-1} = \frac{1}{\alpha \mp \beta \sqrt{-1}}.$$

Si l'équation $Y=0$ admet des racines réelles, le nombre de celles-ci sera pair, et nous supposerons d'abord que ce nombre est un multiple de 4. Dans ce cas, le nombre des racines imaginaires ne sera pas un multiple de 4, et il y aura nécessairement, comme dans le cas de toutes les racines imaginaires, un couple de racines conjuguées ayant pour module l'unité.

Si l'on supposait que le nombre des racines réelles pût être $4r+2$, celui des racines imaginaires serait $4(n-r)$, et l'on devrait pouvoir décomposer Y, comme ci-dessus, en deux facteurs réels Y_1, Y_2 dont l'un contiendrait $2(n-r)$ racines imaginaires conjuguées et $2r+1$ racines réelles, et l'autre contiendrait les racines réciproques correspondantes. Mais on a vu que cette décomposition est impossible, à cause du coefficient du terme y^{2n+1} qui résulterait toujours plus grand numériquement que le coefficient 2 qui y correspond dans le polynôme Y.

Il est donc prouvé que, dans tous les cas, l'équation réciproque $Y=0$ admettra au moins un couple de racines imaginaires conjuguées ayant le module égal à l'unité; d'où il suit que l'équation (1), dont chaque racine x est égale à la somme $y+\frac{1}{y}$ de deux racines réciproques, ad-

mettra au moins une racine réelle dont la valeur numérique sera moindre que 2. C'est le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

4. Soit

$$y = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$

la racine imaginaire de l'équation $Y = 0$ dont le module est égal à 1 : on aura

$$y + \frac{1}{y} = 2\cos\varphi,$$

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = 2\cos 3\varphi,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y^{2n+1} + \frac{1}{y^{2n+1}} = 2\cos(2n+1)\varphi.$$

Substituant ces expressions dans l'équation divisée par y^{2n+1}, on trouvera, après avoir divisé par 2,

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(2n+1)\varphi + A\cos(2n-1)\varphi + B\cos(2n-3)\varphi + \ldots \\ \qquad + G\cos\varphi + 1 = 0. \end{array} \right.$$

On voit par là que le théorème de M. Tchébychew peut être énoncé sous cette forme remarquable, savoir : que *toute équation de la forme* (3), *où il n'entre que des multiples impairs de l'angle* φ *et où les coefficients* A, B,.., G *sont des quantités réelles quelconques, peut être satisfaite par une valeur réelle de* φ, *prise dans l'étendue de la demi-circonférence.*

5. De ce que toute équation réciproque de degré $4n+2$, dans laquelle (le coefficient du premier terme étant l'unité) la valeur absolue du coefficient du terme du milieu est 2 ou moindre que 2, admet au moins un couple de racines imaginaires conjuguées ayant l'unité pour module, il s'ensuit que l'équation du degré $2n+1$, à laquelle on par-

vient par la méthode ordinaire d'abaissement, aura au moins une racine réelle dont la valeur sera comprise entre $+2$ et -2. En partant de ce principe, on peut établir d'autres théorèmes analogues à celui que nous venons de démontrer, ayant pour but de fixer des limites entre lesquelles une ou plusieurs racines d'une équation donnée soient toujours comprises. On voit tout de suite, par exemple, que l'équation

$$x^{2n+1} + ax^{2n-1} + bx^{2n-3} + \ldots + hx + k + px^2 = 0,$$

dont px^2 est le seul terme de degré pair, admet toujours une racine comprise entre $+2$ et -2, si le coefficient p et le terme connu k sont tels, que la quantité $k + 2p$ soit comprise entre les limites $+2$ et -2, ou soit égale à l'une de ces limites. Mais je n'insisterai pas à présent sur ces considérations, qui, combinées avec d'autres principes connus, peuvent conduire à des résultats assez remarquables et amener des secours nouveaux à la pratique de la séparation des racines.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 623 (BOBILLIER);

PAR M. RICHARD,
Élève du lycée de Douai (classe de M. Painvin).

Une droite AB *glisse sur deux autres* D *et* D_1 *non situées dans un même plan, de telle sorte que la partie interceptée entre elles soit constamment vue sous un angle droit d'un certain point* O *de l'espace; cette droite engendre une surface gauche du second ordre.*

Si l'on transforme la question par la méthode des polaires réciproques, en prenant pour surface directrice une sphère ayant son centre au point fixe O, aux deux droites

D et D_1 correspondent deux autres droites fixes. Aux deux points A et B correspondent deux plans qui passent par les droites transformées, puisque les points A et B sont sur ces droites; l'intersection de ces deux plans correspond à la droite AB. Comme la surface directrice est une sphère, ces deux plans sont rectangulaires, puisqu'ils sont respectivement perpendiculaires sur OA et sur OB. Or, on sait que le lieu de leur intersection est un hyperboloïde (*voir* Briot, *Géom. anal.*, p. 526); donc le lieu de la droite AB est une surface réglée du second ordre.

C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 521

(voir t. XIX, p. 96);

PAR M. ABRAHAM SCHNÉE,
Élève du lycée Charlemagne.

Soit décrite une ellipse ayant pour axes une normale et la tangente adjacente quelconque d'une ellipse donnée et touchant le grand axe de l'ellipse au centre; et de même soit décrite une seconde ellipse touchant le petit axe au centre; les lieux des foyers de ces ellipses sont deux cercles concentriques à l'ellipse donnée et ayant pour rayons la demi-somme et la demi-différence des axes.

Soit

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'ellipse donnée.

Soit

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (my + nx + p)^2$$

l'équation de l'ellipse mobile, α et β étant les coordonnées

du foyer. On a d'abord, pour exprimer que la courbe passe par l'origine,

$$(2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = p^2.$$

Pour qu'en outre l'axe des x soit tangent à la courbe en ce point, il faut que le coefficient de x soit nul, ce qui donne

$$(3) \qquad \alpha + np = 0.$$

Les coordonnées du centre de la courbe, en ayant égard à l'équation (3), sont

$$x = mn\frac{\beta + mp}{1 - m^2 - n^2}, \quad y = (1 - n^2)\frac{\beta + mp}{1 - m^2 - n^2};$$

et comme il faut que ce point soit sur l'ellipse donnée, nous aurons

$$(4) \qquad a^2(1 - n^2)^2 + b^2m^2n^2 = a^2b^2\frac{(1 - m^2 - n^2)^2}{(\beta + mp)^2}.$$

Je forme maintenant l'équation qui, dans une conique, donne les coefficients angulaires des diamètres conjugués rectangulaires

$$mn\mu^2 - (m^2 - n^2)\mu - mn = 0.$$

Pour exprimer que la courbe mobile a pour axes la tangente et la normale adjacente de l'ellipse proposée, il suffit de remplacer μ par le coefficient angulaire de la tangente au point considéré, et nous aurons enfin

$$(5) \quad a^4(1 - n^2)^2 - a^2b^2(m^2 - n^2)(1 - n^2) - b^4m^2n^2 = 0.$$

Entre les équations (2), (3), (4) et (5), éliminons m, n et p, nous aurons l'équation du lieu.

De l'équation (2), je tire

$$n = -\frac{\alpha}{p},$$

et je remplace dans l'équation (5). On a comme solution étrangère

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = 0,$$

et, après l'avoir supprimée,

$$(6) \qquad m^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{p^2}\right).$$

Substituons ces valeurs de n et de m^2 dans l'équation (4), il vient après réductions

$$(7) \qquad 2p\beta m = \frac{p^2 - \alpha^2}{b^2}\left[\frac{(a^2 - b^2)^2}{p^2} - a^2\right] - \beta^2.$$

Éliminons m entre les équations (6) et (7), et p au moyen de la relation (2), nous aurons définitivement l'équation

$$[\alpha^2 + \beta^2 - (a-b)^2][\alpha^2 + \beta^2 - (a+b)^2] = 0,$$

qui se dédouble en

$$(8) \qquad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = (a-b)^2, \\ \alpha^2 + \beta^2 = (a+b)^2, \end{cases}$$

résultat conforme à l'énoncé.

Si nous remarquons qu'il n'a été fait aucune hypothèse sur les grandeurs respectives de a et de b, nous conclurons immédiatement de la symétrie des formules (8) qu'on obtient les mêmes lieux, que ce soit le petit ou le grand axe qui coïncide avec l'axe des x. Si l'on vient alors à faire tourner l'une des figures d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$, de façon que les deux ellipses se recouvrent, les cercles obtenus se superposeront pendant toute la rotation, et le théorème sera démontré dans les deux cas.

Note. — La même question a été traitée par M. N. R., de Gand.

CORRESPONDANCE.

1. M. Ange Le Taunéac fait remarquer que la méthode employée par M. Taillier, pour trouver la développée de l'ellipse (p. 143), s'applique avec la même facilité à la recherche de l'*enveloppe d'une droite inscrite à un angle droit*, à la détermination de l'*enveloppe des ellipses décrites par les points de cette même droite*, etc. Dans le cas de l'ellipse, on écrit ordinairement ainsi l'équation (1) (p. 143),

$$\frac{by}{\sin\varphi} - \frac{ax}{\cos\varphi} + c^2 = 0;$$

on obtient alors, en prenant la dérivée,

$$\frac{by\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{ax\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = 0,$$

ou plutôt

$$\frac{by}{\sin^3\varphi} = -\frac{ax}{\cos^3\varphi};$$

d'où l'on conclut, par les propriétés des proportions,

$$\frac{(by)^{\frac{2}{3}}}{\sin^2 x} = \frac{(ax)^{\frac{2}{3}}}{\cos^2\varphi} = \frac{(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}}}{1},$$

etc.

2. A propos du même article, M. H. Delorme fait observer qu'une méthode tout à fait semblable peut être employée pour trouver la développée de l'hyperbole. En effet, un point de cette courbe est défini par les équations

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = b\operatorname{tang}\varphi.$$

L'équation d'une normale est alors

$$\frac{by}{\cos\varphi} + ax \operatorname{tang}\varphi = c^2 \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos\varphi},$$

d'où

$$by + ax \sin\varphi = c^2 \operatorname{tang}\varphi.$$

On a, en prenant la dérivée,

$$ax \cos\varphi = \frac{c^2}{\cos^2\varphi} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\cos\varphi} = \left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

En divisant par tang φ l'équation de la normale et prenant de nouveau la dérivée, on aura facilement

$$\operatorname{tang}\varphi = -\left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Or,

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tang}^2\varphi = 1,$$

donc

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

sera l'équation de la développée de l'hyperbole.

3. M. Caspari, ingénieur-hydrographe, ancien élève de l'École Polytechnique, nous communique deux formules sur les rayons de courbure. Si on appelle ρ le rayon de courbure d'une courbe de l'espace; ρ' le rayon de courbure de sa projection orthogonale; ω l'angle du plan osculateur de la première courbe et du plan de projection; u l'angle de la tangente avec sa projection; v l'angle de cette tangente avec l'intersection des plans, on a

$$(1) \qquad \frac{\rho}{\rho'} = \left(\frac{1 - \sin^2\omega \sin^2 v}{\cos\omega}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$(2) \qquad \rho' = \rho \frac{\cos^3 u}{\cos \omega}.$$

L'une de ces formules se déduit de l'autre au moyen de la relation qui existe entre u et v.

La formule (2) se déduit d'une formule plus générale donnée par M. Peaucellier (t. XX, p. 422), et qui exprime une relation entre les rayons de courbure d'une courbe quelconque, et celui de sa perspective, en deux points correspondants. C'est ainsi que M. Caspari établit sa formule, dont il donne d'ailleurs une démonstration directe.

Une ellipse étant considérée comme la projection d'un cercle, si $2a$ et $2b$ sont les axes, on aura

$$\cos\omega = \frac{b}{a}, \quad \rho = \frac{a^2}{b}\cos^3 u.$$

On sait d'un autre côté qu'en désignant par i l'angle de la normale avec le rayon vecteur, on a

$$\rho \cos^3 i = \frac{b^2}{a},$$

donc

$$a \cos i \cos u = b,$$

relation entre u et i qui conduit à la propriété suivante.

Sur le grand axe d'une ellipse pris pour diamètre décrivons un cercle : soient M un point du cercle et M′ le point correspondant de l'ellipse. Du point T, où les tangentes au cercle et à l'ellipse menées respectivement par les points M et M′ rencontrent le grand axe, décrivons un cercle, avec le rayon $\frac{b}{a}$MT : les deux rayons vecteurs du point M′ seront tangents à ce cercle.

4. Une personne qui ne signe que de ses initiales s'est proposée de démontrer qu'*un triangle dont deux bissec-*

trices sont égales est isocèle, question déjà traitée dans le Journal. Le tour de démonstration employé est fort ingénieux, mais on y suppose que trois droites sont parallèles quand elles divisent deux autres droites en parties proportionnelles, ce qui n'est pas.

Si les personnes qui nous adressent des communications non signées nous donnaient leur nom et leur adresse, en exprimant le désir que leur nom ne parût pas dans le Journal, nous nous conformerions religieusement à leur intention; mais nous pourrions leur faire part de notre sentiment sur quelques-unes de leurs communications, qui nous paraissent susceptibles de corrections ou de modifications.

5. Nous avons reçu de plusieurs élèves des réponses à des questions posées par le Journal. Nous les remercions de leur précieuse collaboration et nous prendrons à l'avenir des mesures pour que l'insertion de leurs travaux ne souffre pas de retard. Nous les prions seulement de vouloir bien se conformer aux recommandations suivantes :

1° Écrire toujours en tête le numéro et l'énoncé complet de la question qu'ils résolvent.

2° Mettre sur des feuilles séparées la solution de chaque question, afin que nous puissions réunir celles qui portent le même numéro.

3° Écrire lisiblement, correctement, et avec la plus grande clarté. Quelques communications ont dû être laissées de côté parce que, pour être présentées à nos lecteurs, elles auraient exigé une nouvelle rédaction. Nous voulons bien corriger par-ci par-là quelques négligences de style, mais nous ne pouvons pas refondre les articles qui nous sont envoyés. Le temps dont nous disposons ne suffirait pas à un pareil travail. P.

BIBLIOGRAPHIE.

Essai sur le Calcul des Quaternions de M. W. Hamilton; par M. *Allegret*, docteur ès sciences de la Faculté de Paris. In-4 de VIII-72 pages. Paris, Leiber, 1862.

M. W. Hamilton nomme *quaternions* des expressions de la forme

$$a + bi + cj + dk,$$

où a, b, c, d sont des quantités quelconques et i, j, k des symboles définis par les égalités suivantes :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad jk = -kj = i,$$
$$ki = -ik = j, \quad ij = -ji = k.$$

Si l'on opère sur ces quantités comme sur des quantités réelles, en ayant égard aux conventions précédentes, on arrive, en comparant les résultats aux opérations indiquées, à des identités qui constituent autant de théorèmes. Ces théorèmes seraient demeurés stériles, si l'auteur n'avait donné aux symboles crées par lui une représentation géométrique, comme Mourey l'avait déjà fait pour les symboles dits *imaginaires*. On peut regarder cette manière de procéder comme assez peu logique, ainsi que l'a remarqué M. Bellavitis; car inventer des expressions qui par elles-mêmes n'offrent aucun sens à l'esprit, et chercher ensuite à leur en donner un par ce que l'on appelle *une interprétation géométrique*, n'est-ce pas comme si, après avoir construit une belle phrase, on cherchait quelle pensée on pourrait bien y mettre? Quoi qu'il en soit, M. Allegret a voulu, dans ce qu'il in-

titule modestement un essai, faire connaître une méthode que recommande le grand nom de M. Hamilton. Sa thèse se divise en trois parties. La première contient l'exposition des règles du calcul des quaternions. La seconde, dans laquelle se trouve l'interprétation géométrique des symboles employés, est terminée par l'examen d'un grand nombre d'identités utiles à connaître à cause de leur emploi fréquent dans toute l'analyse. Enfin la troisième section est consacrée aux applications du nouveau calcul à quelques points de la théorie générale des lignes et des surfaces courbes.

Le calcul de M. Hamilton est exposé par M. Allegret avec autant de clarté que le sujet le comporte. L'auteur, familiarisé par un long usage avec les procédés de ce calcul, s'en exagère peut-être la facilité. « Nous retrouvons ainsi, dit-il à la page 45, comme on voit, *presque immédiatement*, les principales formules de la Trigonométrie sphérique. » Ce *presque immédiatement* vient après quarante-quatre pages d'explications préliminaires. Nous ne savons pas ce que l'avenir réserve à l'analyse quaternionne, mais nous croyons que les deux Trigonométries n'ont rien à gagner à son emploi. S'il peut y avoir de l'avantage à traiter un sujet connu par une nouvelle méthode, c'est lorsque cette méthode est de nature à jeter du jour sur la question. Or, la Trigonométrie servirait plutôt à éclairer les quaternions, que les quaternions ne serviraient à éclairer la Trigonométrie. P.

QUESTIONS.

637. *Théorème.* — Si l'équation

$$A x^m + B x^{m-1} + \ldots$$
$$+ D x^p + E x^{p-1} + F x^{p-2} + G x^{p-3} + \ldots + U = 0$$

a toutes ses racines réelles, les coefficients D, E, F, G de quatre termes consécutifs vérifient l'inégalité

(1) $$(DG - EF)^2 - 4(E^2 - DF)(F^2 - EG) < 0.$$

Corollaire I. — Quand la relation (1) n'est pas vérifiée, l'équation a des racines imaginaires.

Corollaire II. — Si, entre les coefficients E, F, G qui suivent immédiatement un coefficient nul, on a la relation

$$4EG - 3F^2 \overline{\gtrless} 0,$$

l'équation a des racines imaginaires.

Corollaire III. — Il en est de même si l'on a

$$4DF - 3E^2 \overline{\gtrless} 0,$$

D, E, F étant trois coefficients qui précèdent immédiatement un coefficient nul.

Corollaire IV. — Si $E = 0$ et que D, F, G satisfassent à la condition

$$D(DG^2 + 4F^3) \overline{\gtrless} 0,$$

l'équation a des racines imaginaires.

Corollaire V. — Il en est de même si

$$F = 0, \quad G(D^2 G + 4E^3) \overline{\gtrless} 0.$$

(CATALAN.)

658. La développante d'un cercle est la route que suit le pôle d'une spirale logarithmique roulant sur un autre cercle.

659. La caustique par réflexion de la développante d'un cercle pour des rayons émanés du centre est une développée de la spirale d'Archimède.

660. La courbe réciproque de la développante d'un cercle pour des rayons émanés du centre est une spirale tractrice. (On appelle ainsi la courbe qui, en coordonnées polaires, a une tangente constante.)

661. La spirale tractrice est la trajectoire que suit le pôle d'une spirale hyperbolique roulant sur elle-même, en partant de la coïncidence des deux pôles.

Note. — Ces quatre dernières questions sont proposées par M. Haton de la Goupillière.

662. $2S$ étant l'aire d'un quadrilatère sphérique inscrit; a, b, c, d les côtés; $2p$ le périmètre : on a

$$\sin\frac{S}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}\sin\frac{p-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}},$$

$$\cos\frac{S}{2}=\sqrt{\frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a-b}{2}\cos\frac{p-a-c}{2}\cos\frac{p-a-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}}.$$

(Grunert.)

663. Les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre quelconque, sont sur une même surface du troisième ordre qui contient toutes les arêtes du tétraèdre. (E. Beltrami.)

SOLUTION DE LA QUESTION 642 (CATALAN);

PAR MM. C. GEOFFROY ET L. L'HUILIER,
Élèves du lycée de Nancy.

Discuter la fonction

$$y = \frac{(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2}{1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}}.$$

En égalant à zéro la dérivée de y, on trouve l'équation

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} - (n+1)x^n = 0;$$

trouver les racines réelles de cette équation.

x étant supposé compris entre $+1$ et -1, développer y en série ordonnée suivant les puissances de x.

La fonction y se met sous la forme

$$y = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x^{n+1} - 1}{x^{n+1} + 1},$$

et sa dérivée

$$y' = 2\frac{(1+x)}{1-x} \cdot \frac{[1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} - (n+1)x^n]}{(x^{n+1}+1)^2}.$$

Je discuterai d'abord la dérivée en supposant successivement n pair et n impair.

Soit

$$N = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} - (n+1)x^n.$$

1° Dans le cas de n pair, l'équation $N = 0$ admet les racines $+1$ et -1 : elle les admet chacune deux fois; car $+1$ et -1 rendent nulle la dérivée de N; mais elle ne les admet pas plus de deux fois, car l'équation $N = 0$ n'a que deux variations.

$\varphi(x)$ désignant le quotient $\frac{N}{(1-x)^2(1+x)^2}$, on donne à la dérivée la forme

$$y' = 2 \cdot \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{(1-x)^2 (1+x)^2 \varphi(x)}{(x^{n+1}+1)^2} = 2 \cdot \frac{(1-x)(1+x)^3 \varphi(x)}{(x^{n+1}+1)^2};$$

$(n+1)$ est impair, donc $(x^{n+1}+1)^2$ est divisible par $(x+1)^2$, et y' est nul pour $x=1$ et $x=-1$.

2° Quand n est impair, l'équation $N=0$ n'admet plus la racine -1; mais comme $(x^{n+1}+1)$ n'est plus divisible par $(x+1)$, on est encore conduit à ce résultat, que y' est nul pour $x = \pm 1$.

Cela posé, on voit que, pour $x=0$, y est égal à 1, et y' est positif et égal à 2. y va donc en croissant jusqu'à son maximum $(n+1)$ qui correspond à la racine $x=1$ de la dérivée y'. La dérivée devient alors négative, et y diminue en tendant vers l'unité. Du côté des x négatifs, y diminue d'abord, passe par un minimum correspondant à $x=-1$ et augmente ensuite en tendant vers l'unité.

On peut remarquer que les valeurs de y correspondant à deux valeurs de x égales et de signes contraires sont inverses l'une de l'autre quand n est impair.

Développement de y en série. y se développe en série par suite des transformations suivantes :

$$y = \frac{x^{n+2}+x^{n+1}-x-1}{x^{n+1}-x^{n+1}+x-1} = 1 + \frac{2x(x^n-1)}{(x-1)(x^{n+1}+1)}$$
$$= 1 + \frac{2x(1+x+\ldots+x^{n-1})}{x^{n+1}+1}.$$

Quand x est compris entre 1 et -1, on a

$$\frac{1}{x^{n+1}+1} = 1 - x^{n+1} + x^{2(n+1)} - x^{3(n+1)} + \ldots,$$

donc

$$y = 1 + 2x(1+x+\ldots+x^{n-1})[1 - x^{n+1} + x^{2(n+1)} - x^{3(n+1)} + \ldots].$$

Note. — La même question a été résolue par M. Pelletereau, élève du lycée de Poitiers, et par M. de Virieu.

SUR LE CERCLE DES NEUF POINTS;

PAR M. JOHN GRIFFITHS,
Jesus college, Oxford.

Si nous considérons les trois cercles suivants : 1° le cercle des neuf points d'un triangle ABC, 2° le cercle circonscrit au même triangle, et 3° le cercle par rapport auquel chaque sommet A, B, C est le pôle du côté opposé, nous trouverons que leurs circonférences se coupent toutes les trois aux deux mêmes points, réels ou imaginaires.

En effet, soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations des côtés CB, AC, BA, on sait que les équations des trois cercles seront respectivement

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}\Sigma = \alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C \\ \qquad -2(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C) = 0,\end{array}\right.$$

$$(2)\quad S = \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = 0,$$

$$(3)\quad S' = \alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C = 0.$$

Il en résulte que

$$\Sigma = S' - 2S;$$

d'où l'on voit que les circonférences Σ, S' et S se coupent aux deux mêmes points.

Pour obtenir l'équation de la ligne passant par ces deux points, nous avons

$$\begin{aligned}S' + 2S &= \alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C \\ &\quad + 2(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C) \\ &= 2(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C)(\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C),\end{aligned}$$

parce que

$$A + B + C = \pi.$$

Donc

$$(4) \qquad \alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C = 0$$

est l'équation cherchée.

Remarques.

1° Le pôle de l'axe radical (4) par rapport au cercle S' est donné par les équations

$$\alpha \sin A = \beta \sin B = \gamma \sin C,$$

c'est-à-dire que le pôle se confond avec le centre de gravité de l'aire ABC.

2° L'équation $\Sigma = 0$ peut prendre les formes suivantes :

$$\alpha[\alpha \sin A \cos A - (\beta \sin C + \gamma \sin B)] + (\beta \sin B - \gamma \sin C)(\beta \cos B - \gamma \cos C) = 0,$$

$$\beta[\beta \sin B \cos B - (\gamma \sin A + \alpha \sin C)] + (\gamma \sin C - \alpha \sin A)(\gamma \cos C - \alpha \cos A) = 0,$$

$$\gamma[\gamma \sin C \cos C - (\alpha \sin B + \beta \sin A)] + (\alpha \sin A - \beta \sin B)(\alpha \cos A - \beta \cos B) = 0.$$

Note du Rédacteur. — Quand les trois angles A, B, C sont aigus, le rayon de la circonférence S', conjuguée au triangle ABC, est imaginaire, et il en est de même des deux points communs aux circonférences Σ, S, S'. — Si l'un des angles A, B, C, par exemple A, est obtus, le cercle S' est réel; il a pour centre le point de rencontre H des trois hauteurs AD, BE, CF du triangle ABC, et pour rayon une moyenne géométrique entre HA et HD. Dans ce cas, il est évident que les circonférences S, S' se coupent en deux points réels. — Lorsque le triangle ABC est rectangle, le rayon de S' est nul; les deux points communs coïncident en un seul qui est le sommet de l'angle droit. G.

SUR L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. E. CATALAN.

Dans l'un des derniers numéros du *Journal de Mathématiques,* M. Schlömilch ramène la résolution de l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

à la résolution d'une équation réciproque. La méthode suivante, qui ne diffère pas de celle de Descartes (*), me paraît préférable, sous le rapport de la simplicité, non-seulement à celle de M. Schlömilch, mais encore à tous les procédés connus.

I. Pour résoudre l'équation

$$(1) \qquad x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

à coefficients réels, posons

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = (x^2 + px + q)(x^2 - px + q'):$$

nous devrons trouver, pour les inconnues p, q, q', *au moins un système de valeurs réelles.*

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x, dans les deux membres, nous obtenons

$$q' + q = A + p^2, \quad q' - q = \frac{B}{p}, \quad qq' = C;$$

puis, en éliminant q et q',

$$(2) \qquad (A + p^2)^2 - \frac{B^2}{p^2} = 4C.$$

(*) SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure,* 2e édition, p. 242.

Soit

$$(3)\qquad A + p^2 = q' + q = z;$$

l'équation (2) devient

$$(4)\qquad z^3 - Az^2 - 4Cz - (B^2 - 4AC) = 0.$$

Telle est la *réduite* de l'équation (1).

II. D'après la relation (3), *l'équation* (4) *a au moins une racine plus grande que* A (*). Si l'on désigne par γ cette racine, on trouve

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \sqrt{\gamma - A},\\ q' &= \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{B}{\sqrt{\gamma - A}}\right),\\ q &= \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{B}{\sqrt{\gamma - A}}\right); \end{aligned}\right.$$

etc.

III. L'équation

$$x^4 + x^2 + 8x - 15 = 0$$

a pour réduite

$$z^3 - z^2 + 60z - 124 = 0.$$

Celle-ci donne $\gamma = 2$. Donc

$$p = 1,\quad q' = 5,\quad q = -3;$$

et enfin

$$x^4 + x^2 + 8x - 15 = (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 5).$$

IV. *Remarque*. — Lorsque la réduite (4) a ses trois racines réelles et plus grandes que A, la proposée (1) a toutes ses racines réelles. Mais alors les formules de

(*) On reconnaît aisément qu'elle en a un nombre impair.

Cardan (*) deviennent illusoires, et les valeurs de p, q, q' ne peuvent être exprimées sous forme réelle en fonction des coefficients A, B, C. Il en est de même si la réduite a ses racines réelles, mais non supérieures, toutes trois, à A. C'est donc seulement quand l'équation (4) a une seule racine réelle que les formules de Cardan peuvent être appliquées utilement à la résolution de l'équation (1) (**). Ce cas est celui où les coefficients A, B, C satisfont à la condition

$$-16(A^2-4C)^2C + 4AB^2(A^2-36C) + 27B^4 > 0.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 288

(voir t. XIII, p. 291);

PAR UN ABONNÉ.

Lorsque plusieurs surfaces du second ordre Σ *sont circonscrites à une surface du même ordre* S, *tout plan cyclique de* S *coupe les surfaces* Σ *suivant des coniques dont les focales passent toutes par deux mêmes points, qui sont réels ou imaginaires suivant que le cercle d'intersection de* S *et du plan considéré est imaginaire ou réel.* (GROS.)

En prenant pour origine le centre d'un cercle tracé sur la surface S, pour plan des xy le plan de ce cercle, et pour plan des xz le plan principal perpendiculaire aux

(*) Ou plutôt de Tartaglia. *Voyez* la savante Notice insérée, par le regrettable M. Terquem, au tome XV des *Nouvelles Annales*.

(**) Je mets de côté, bien entendu, le cas où l'équation (1) aurait des racines égales.

plans cycliques, l'équation de cette surface S est

$$x^2 + y^2 + Az^2 + 2Bxz + 2Cz + D = 0.$$

Par suite, la surface Σ est représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + Az^2 + 2Bxz + 2Cz + D + \lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2 = 0;$$

la section σ, de cette surface par le plan des xy, a pour équation

$$x^2 + y^2 + D + \lambda(\alpha x + \beta y + \delta)^2 = 0.$$

Si l'on prend sur l'axe Oz deux points F et F', dont les z soient $\pm\sqrt{D}$, la distance de l'un de ces points à un point quelconque de la courbe σ est une fonction rationnelle de x et de y; donc la focale de cette courbe passe par les points F et F'.

Le cône circonscrit à S ayant son sommet en F est de révolution, puisque son sommet est situé sur la focale de sa base. On voit par là que si le cercle se déplace parallèlement à lui-même, les points F et F' décrivent le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à la surface S. On sait que ce lieu est une conique homofocale à la section C de la surface S par le plan principal perpendiculaire aux plans cycliques.

La courbe C rencontre l'axe des x en deux points E et E' dont les x sont $\pm\sqrt{-D}$, par conséquent les points F et F' sont réels quand les points E et E' sont imaginaires, et inversement.

Si l'on prend sur l'axe Ox deux points e, e' dont les x soient $\pm\sqrt{D}$, ces points appartiennent à la courbe supplémentaire (*) de C relativement à la direction Ox. On

(*) M. Poncelet a appelé *coniques supplémentaires*, relativement à la direction Oy, les coniques représentées par les équations

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

voit par là que la courbe des points F et F′ s'obtient en faisant tourner la corde ee' de 90 degrés, d'où l'on conclut qu'étant données deux coniques supplémentaires relativement à une direction quelconque, si l'on fait tourner d'un angle droit les ordonnées de l'une on obtient une courbe homofocale à l'autre.

Note du Rédacteur. — MM. Cremona et Combescure nous ont envoyé des démonstrations du même théorème, très-ingénieuses, mais un peu détournées : nous avons préféré la précédente, qui est plus directe. En 1860, M. Chasles, dans ses *Leçons sur les courbes homofocales*, a démontré le théorème suivant : *Tous les cônes de révolution de même sommet ont pour bases, sur un plan quelconque, des coniques qui ont toutes un double contact avec un même cercle imaginaire.*

Il est aisé de voir que la proposition qui fait le sujet de cet article n'est que la réciproque de ce théorème; en effet, les surfaces Σ étant circonscrites à la surface S, les sections des surfaces Σ par un plan quelconque ont un double contact avec la section de la surface S par le même plan.

---

telles, que le rapport des ordonnées correspondant à une même abscisse est $\sqrt{-1}$.

THÉORÈME

DÉMONTRÉ PAR M. ÉMILE DUPUY,
Élève de M. V. H., à la pension de Laflolie.

Étant donné un cercle dont le centre est O *et le rayon* R, *on prend sur un diamètre* COD *la distance* OQ *égale au côté du carré inscrit, et, par le point* Q, *on conduit une sécante quelconque* QAB, *rencontrant la circonférence aux points* A, B. *Puis, aux points* A, B, *on élève à la sécante des perpendiculaires, et on projette le centre* O *sur ces perpendiculaires, en* M *et* N : *le lieu géométrique de ces projections est une ligne telle, que le produit des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constant.*

Soit

$$OQ' = OQ = R\sqrt{2},$$

et soient F et F' les milieux de OQ et de OQ'; je dis que les points fixes F, F' sont tels, que le produit $MF \times MF'$ est constant.

En effet, les triangles QOM, Q'OM donnent, d'après un théorème connu,

$$OM^2 + MQ^2 = 2MF^2 + 2OF^2,$$
$$OM^2 + MQ'^2 = 2MF'^2 + 2OF'^2.$$

D'où

$$(1) \qquad 2MF^2 = OM^2 + MQ^2 - 2OF^2,$$
$$(2) \qquad 2MF'^2 = OM^2 + MQ'^2 - 2OF'^2.$$

Mais

$$2OF^2 = 2OF'^2 = R^2.$$

D'ailleurs,

$$MQ^2 = AM^2 + AQ^2 = R^2 - OM^2 + AQ^2;$$

substituant dans l'égalité (1), il vient

$$2MF^2 = AQ^2.$$

On a de même

$$2MF'^2 = BQ^2.$$

Par suite

$$2MF \times MF' = QA \times QB = R^2,$$

d'où

$$MF \times MF' = \frac{R^2}{2}, \text{ quantité constante.}$$

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DES COURBES PLANES, D'APRÈS M. TIMMERMANS;

Par un ABONNÉ.

M. Timmermans a donné dans les *Mémoires de la Société des sciences de Lille* (1827-1828) une propriété curieuse des courbes planes. Comme ce recueil n'a qu'une publicité restreinte, il est probable que peu de personnes connaissent le théorème de M. Timmermans, et il sera sans doute agréable aux lecteurs des *Nouvelles Annales* de le trouver ici.

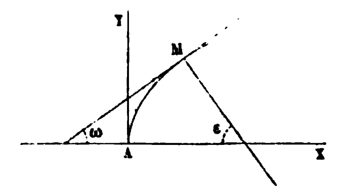
Théorème. — *En un point quelconque* M *d'une courbe plane soient construits le rayon de courbure* R_1 *de cette courbe et les rayons de courbure* $R_2, R_3, \ldots,$ *des développées successives à l'infini. Il existe sur le plan de la courbe un point unique* O *tel que, si de ce point on abaisse :* 1° *une perpendiculaire* OT *sur la tangente;*

2° *une perpendiculaire* ON *sur la normale, on aura*

$$OT = R_1 - R_3 + R_5 - \ldots,$$
$$ON = R_2 - R_4 + R_6 - \ldots,$$

c'est-à-dire que la perpendiculaire abaissée de O *sur la tangente en un point quelconque est égale à la somme des rayons de courbure successifs d'ordre impair relatifs à ce point, ces rayons pris avec des signes alternativement positifs et négatifs; et la perpendiculaire abaissée sur la normale est égale à la somme des rayons de courbure d'ordre pair, pris aussi avec des signes alternatifs.*

Démonstration. — Supposons la courbe rapportée à sa normale et à sa tangente en un premier point fixe A; et



soit M un point variable dont les coordonnées sont x et y. En appelant ω l'angle que la tangente en M fait avec l'axe des x, et s l'arc de courbe, on a

$$dx = \cos\omega . ds, \quad dy = \sin\omega . ds.$$

D'ailleurs, à tout élément de courbe on peut substituer l'élément du cercle de courbure; ainsi, en appelant ε l'angle de la normale avec le même axe $\left(\text{de sorte que } \omega + \varepsilon = \frac{\pi}{2}\right)$, on a $ds = R_1 d\varepsilon$; et les relations ci-dessus deviennent

$$dx = -R_1 \cos\omega d\omega, \quad dy = -R_1 \sin\omega d\omega.$$

De plus, la théorie des développées donnant que l'accroissement différentiel du rayon de courbure est égal à l'arc élémentaire de la développée, si on représente par s_1 l'arc de la première développée, on a

$$dR_1 = ds_1,$$

et comme $ds_1 = R_2 d\varepsilon$ ou $= -R_2 d\omega$, on a finalement

$$dR_1 = -R_2 d\omega,$$

et de même

$$dR_2 = -R_3 d\omega,$$
$$dR_3 = -R_4 d\omega,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cela posé, calculons la valeur de x en intégrant par parties celle de dx; il vient d'abord pour l'intégrale indéfinie

$$\begin{aligned} x = \text{const} - R_1 \sin\omega - \int R_2 \sin\omega\, d\omega \\ + R_2 \cos\omega + \int R_3 \cos\omega\, d\omega \\ + R_3 \sin\omega + \int R_4 \sin\omega\, d\omega \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

formule qu'il faut lire en remplaçant successivement l'intégrale de chaque ligne par les deux termes placés au-dessous d'elle dans la ligne suivante. Supposons l'intégration par parties prolongée indéfiniment et prenons à la limite inférieure de l'intégrale $\omega = \frac{\pi}{2}$, ce qui répond au point A de la figure. Si nous représentons par r_1, r_2, $r_3, \ldots,$ les rayons successifs relatifs à ce point, il viendra

$$\begin{aligned} x = (R_2 - R_4 + R_6 - \ldots)\cos\omega - (R_1 - R_3 + R_5 - \ldots)\sin\omega \\ + (r_1 - r_3 - r_5 - \ldots), \end{aligned}$$

ou bien, en représentant par ΣR_p la somme des rayons d'ordre pair pris alternativement avec les signes + et —, et par ΣR_i la somme des rayons impairs pris aussi alternativement avec les signes + et —,

$$x = (\Sigma R_p)\cos\omega - (\Sigma R_i)\sin\omega + (\Sigma r_i).$$

On trouvera de la même manière

$$y = (\Sigma R_p)\sin\omega + (\Sigma R_i)\cos\omega - \Sigma r_p.$$

Supposons maintenant que les deux sommes relatives au point A aient des valeurs finies; transportons l'origine au point dont les coordonnées sont

$$x_1 = (\Sigma r_i), \quad y_1 = -(\Sigma r_p);$$

puis, par cette nouvelle origine, menons deux nouveaux axes rectangulaires OX' et OY' respectivement parallèles à la normale et à la tangente en M, c'est-à-dire dont la situation soit représentée par une rotation des anciens axes égale à $\frac{\pi}{2} - \omega$, effectuée dans le sens de $+x$ à $-y$ (pour que le nouvel axe des x soit la normale en M); les formules connues donneront les relations suivantes :

$$x = Y\cos\omega + X\sin\omega + \Sigma r_i,$$
$$y = Y\sin\omega - X\cos\omega - \Sigma r_p.$$

Or, si on applique ces formules aux coordonnées du point M trouvées ci-dessus par l'intégration, on trouvera pour ce point

$$X = -(\Sigma R_i), \quad Y = (\Sigma R_p),$$

ce qui constitue précisément le résultat énoncé au théorème.

Nota.—Il arrivera dans certaines courbes que ce point dont nous venons d'établir l'existence, et que M. Timmermans appelle *pôle de la courbe*, sera situé à l'infini.

BIBLIOGRAPHIE.

Analyse d'un Mémoire de M. Sella, présenté à l'Académie des Sciences de Turin, le 7 avril 1862;

PAR M. DEWULF,
Capitaine du génie, à Bougie.

Ce Mémoire a pour objet une nouvelle étude du frottement. M. Quintino Sella commence par passer en revue les diverses études et expériences faites jusqu'à ce jour sur le frottement.

Les expériences faites au XVIIe siècle par Amontons ont conduit à la loi de l'indépendance du frottement de l'étendue des surfaces de contact.

En 1781, Coulomb a fait des expériences très-connues d'où il a conclu que le frottement est: 1° proportionnel à la pression; 2° indépendant de l'étendue de contact; 3° presque toujours indépendant de la vitesse du mouvement.

De 1831 à 1834, le général Morin a fait une longue série d'expériences suivant une méthode analogue à celle de Coulomb. Ces expériences ont confirmé les deux premières lois de Coulomb et établi l'indépendance du frottement de la vitesse du mouvement.

Les lois de Coulomb ont depuis été admises sans contestation dans tous les Traités de Mécanique; cependant les praticiens n'ont pas confiance dans la rigueur de ces principes. Ainsi les ingénieurs savent que les freins qui suffisent pour régulariser le mouvement d'un convoi marchant avec la vitesse ordinaire, ne peuvent arrêter l'accélération quand la vitesse acquise a dépassé certaines limites.

Poirée et Bochet ont fait une série d'expériences sur les chemins de fer au moyen d'un dynamomètre. Ils attachaient à une locomotive un wagon dont les roues avaient été fixées de manière à glisser sur les rails sans tourner, ou dont les roues avaient été munies de patins. De ces expériences Bochet conclut que: 1° le frottement est proportionnel à la pression; 2° sensiblement indépendant de l'étendue de la surface de contact; 3° dépendant de la vitesse.

Enfin Hirn a fait des expériences pour déterminer l'équivalent mécanique de la chaleur. Il distingue deux espèces de frottement, le frottement immédiat et le frottement médiat. L'un se développe quand les surfaces des deux corps se touchent directement, et l'autre quand un corps solide, liquide ou gazeux, est interposé entre les deux surfaces. D'après Hirn le frottement immédiat obéit aux lois de Coulomb; mais le frottement médiat est une fonction compliquée de la pression, de l'étendue des surfaces de contact et de la vitesse. Il ajoute une remarque très-importante, c'est qu'à une certaine vitesse l'air vient s'interposer entre les corps frottants et diminuer notablement le frottement.

Après ces considérations historiques, M. Quintino Sella expose ses propres recherches.

Quand deux corps frottent l'un sur l'autre, les aspérités de leurs surfaces font que des parcelles de matière sont arrachées à l'un et à l'autre corps, et l'attraction des molécules de l'un des corps sur celles de l'autre, dans le voisinage des surfaces de contact, donne naissance à des mouvements vibratoires. En d'autres termes, le frottement est dû à une destruction réciproque des corps, et à des vibrations qui naissent dans le voisinage des surfaces de contact. L'état des surfaces de contact doit influer surtout sur la destruction réciproque des corps, et la nature

intime des corps influe surtout sur les vibrations. En sorte que si l'on parvenait à éliminer ou à réduire infiniment la destruction mutuelle des corps, le frottement serait une fonction de l'élasticité des corps entre lesquels il s'exerce.

En entendant le frottement de cette manière, on ne voit pas comment il peut être indépendant de l'étendue des surfaces de contact et de la vitesse, et simplement proportionnel à la pression. Il est donc très-important d'étudier le frottement entre des limites très-étendues de pression, de vitesse, d'étendue des surfaces de contact et de durée de frottement, de faire varier la direction du frottement par rapport aux corps frottants quand l'élasticité de ces corps n'est pas la même dans tous les sens, comme dans les cristaux.

Les méthodes de Coulomb, Morin, Poirée et Bochet ne peuvent être employées; elles peuvent satisfaire aux besoins de la mécanique appliquée, mais non aux exigences de la physique moléculaire. La balance de Hirn répondrait en partie au but, mais elle n'est pas applicable aux cristaux et elle laisse trop d'incertitude sur la distribution de la pression entre les deux corps frottants.

M. Quintino Sella propose deux instruments qu'il nomme *trypsomètres* et qui sont fondés sur les principes suivants :

Si l'on place un corps plan sur un cylindre tournant, le frottement tendra à déplacer le corps. Si ce corps est maintenu par un ressort, la tension de celui-ci donnera la mesure du frottement.

Si l'on place un corps sur un disque tournant autour d'un axe vertical, la tension du ressort qui empêche le corps frottant de suivre le mouvement du disque donne aussi la mesure du frottement.

Avec ces trypsomètres on peut étudier le frottement entre des limites très-étendues de vitesse; la durée du

frottement peut être assez grande pour que les surfaces en contact ne conservent plus d'aspérités, et, au moyen d'une machine pneumatique, on peut faire disparaître l'influence de l'air ; on peut, en outre, expérimenter sur des corps de petite dimension, comme les cristaux.

Le trypsomètre à cylindre peut servir à l'étude des variations du frottement dans les cristaux quand les directions du frottement varient.

Le trypsomètre à disque peut servir à l'étude des variations du frottement avec l'étendue des surfaces de contact.

Le trypsomètre à cylindre, construit par Froment, se compose d'un mouvement d'horlogerie qui met en mouvement deux cylindres, dont un compteur donne la vitesse. Sur l'un des cylindres ou sur les deux à la fois, on place des corps fixés à une verge dont les extrémités sont attachées à l'une des extrémités d'un ressort, que l'on tend plus ou moins au moyen d'une vis placée à son autre extrémité. Les deux cylindres tournent en sens contraire. Quand on a placé un corps sur chaque cylindre, la tension du ressort donne la différence entre les deux frottements ; on a le frottement absolu quand un seul cylindre est chargé.

M. Sella et M. l'ingénieur Montefiore ont fait quelques expériences avec ce trypsomètre et ont obtenu les résultats suivants :

1° Pour les mêmes corps, le frottement varie considérablement avec l'état des surfaces de contact ;

2° Entre les limites de vitesse $0^m,00$ et $0^m,50$ par seconde, le frottement croît avec la vitesse.

Ce résultat est en contradiction directe avec ceux que l'on a obtenus sur les chemins de fer. Il en résulte que pour les grandes vitesses des chemins de fer l'air s'interpose entre les roues et les freins, ou bien que le frotte-

ment est une fonction de la vitesse telle, qu'il croît avec la vitesse jusqu'à un certain maximum à partir duquel il décroît quand la vitesse continue à croître.

3° Le frottement varie dans les cristaux suivant la direction dans laquelle il s'exerce.

Pour le quartz, par exemple, dans les limites de vitesse indiquées ci-dessus, le frottement parallèlement à l'axe cristallographique de symétrie est notamment supérieur au frottement dirigé perpendiculairement à cet axe.

MM. Sella et Montefiore doivent continuer leurs expériences.

SOLUTION DE LA QUESTION 610;

PAR M. E. BELTRAMI.

Soient donnés une surface du second degré, la sphère exceptée, et un point fixe, lieu d'un spectateur; sous quel angle verra-t-il la surface?

1. Soit

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface du second degré rapportée à trois axes rectangulaires, (x_0, y_0, z_0) le point fixe, lieu du spectateur.

Un rayon visuel quelconque est représenté par les équations

$$\frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu} = \rho; \tag{2}$$

λ, μ, ν déterminent sa direction, ρ la position d'un quelconque de ses points. Substituant dans l'équation (1) les valeurs de x, y, z données par les équations (2), et écrivant φ_0 pour $\varphi(x_0, y_0, z_0)$, on obtient l'équation sui-

vante :

$$0 = \varphi_0 + \rho\left(\lambda \frac{d\varphi_0}{dx_0} + \mu \frac{d\varphi_0}{dy_0} + \nu \frac{d\varphi_0}{dz_0}\right)$$

$$+ \frac{\rho^2}{2}\left(\lambda^2 \frac{d^2\varphi_0}{dx_0^2} + \mu^2 \frac{d^2\varphi_0}{dy_0^2} + \nu^2 \frac{d^2\varphi_0}{dz_0^2} + 2\mu\nu \frac{d^2\varphi_0}{dy_0\,dz_0}\right.$$

$$\left. + 2\nu\lambda \frac{d^2\varphi_0}{dz_0\,dx_0} + 2\lambda\mu \frac{d^2\varphi_0}{dx_0\,dy_0}\right),$$

où $\frac{d\varphi_0}{dx_0}, \frac{d^2\varphi_0}{dx_0^2}, \ldots,$ représentent ce que deviennent les dérivées $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \ldots$, quand on y remplace x, y, z par x_0, y_0, z_0. Cette équation donne les valeurs de ρ répondant aux deux intersections du rayon avec la surface; donc, si le rayon touche la surface, ces deux valeurs doivent être égales, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\left(\lambda \frac{d\varphi_0}{dx_0} + \mu \frac{d\varphi_0}{dy_0} + \nu \frac{d\varphi_0}{dz_0}\right)^2$$

$$= 2\varphi_0\left(\lambda^2 \frac{d^2\varphi_0}{dx_0^2} + \mu^2 \frac{d^2\varphi_0}{dy_0^2} + \nu^2 \frac{d^2\varphi_0}{dz_0^2} + 2\mu\nu \frac{d^2\varphi_0}{dy_0\,dz_0}\right.$$

$$\left. + 2\nu\lambda \frac{d^2\varphi_0}{dz_0\,dx_0} + 2\lambda\mu \frac{d^2\varphi_0}{dx_0\,dy_0}\right).$$

En éliminant de cette équation λ, μ, ν au moyen des équations (2), on aura évidemment l'équation du cône visuel. Ainsi, en rapportant ce cône à trois nouveaux axes parallèles aux premiers et avec l'origine à son sommet, l'équation du cône visuel sera la suivante

$$(3) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxz = 0,$$

où

$$A = \left(\frac{d\varphi_0}{dx_0}\right)^2 - 2\varphi_0 \frac{d^2\varphi_0}{dx_0^2}, \quad B = \left(\frac{d\varphi_0}{dy_0}\right)^2 - 2\varphi_0 \frac{d^2\varphi_0}{dy_0^2},$$

$$C = \left(\frac{d\varphi_0}{dz_0}\right)^2 - 2\varphi_0 \frac{d^2\varphi_0}{dz_0^2},$$

$$D = \frac{d\varphi_0}{dy_0}\frac{d\varphi_0}{dz_0} - 2\varphi_0\frac{d^2\varphi_0}{dy_0\,dz_0},\quad E = \frac{d\varphi_0}{dz_0}\frac{d\varphi_0}{dx_0} - 2\varphi_0\frac{d^2\varphi_0}{dz_0\,dx_0},$$

$$F = \frac{d\varphi_0}{dx_0}\frac{d\varphi_0}{dy_0} - 2\varphi_0\frac{d^2\varphi_0}{dx_0\,dy_0}.$$

Dans l'équation (3), x, y, z indiquent des coordonnées relatives aux nouveaux axes, mais x_0, y_0, z_0 sont toujours les coordonnées du point fixe par rapport aux axes primitifs.

2. Cherchons maintenant à faire disparaître de l'équation du cône les termes contenant les produits des variables.

Pour cela nous rapporterons le cône à un nouveau système d'axes rectangulaires des x', y', z' ayant même origine que le système précédent.

L'équation du cône se trouvera ramenée à la forme

$$(4)\qquad ax'^2 + by'^2 + cz'^2 = 0.$$

On sait que a, b, c sont les trois racines de l'équation du troisième degré en λ

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} A-\lambda & F & E \\ F & B-\lambda & D \\ E & D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

que nous désignerons, pour abréger, par $\Delta = 0$ (*).

3. On sait également que l'équation $\Delta = 0$ a toujours ses trois racines réelles. Mais, dans le cas actuel, il importe de remarquer que ces racines ne sauraient être toutes trois de même signe, sans que le cône visuel cessât d'être réel. Voulant donc laisser de côté cette hypothèse, nous admettrons que l'une de ces racines, par exemple a,

(*) Nous supprimons la démonstration que M. Beltrami donne de cette propriété bien connue de l'équation $\Delta = 0$, qui n'est autre que l'équation en s de nos Traités élémentaires. P.

soit de signe contraire aux deux autres. On peut même supposer que a soit une quantité positive; car si elle ne l'était pas, il suffirait de changer le signe de chacune des quantités A, B, etc., ainsi qu'il est évidemment permis de le faire. Nous admettrons donc que a est une quantité positive, b et c deux quantités négatives. D'après ces hypothèses, il est clair que, des trois axes du cône visuel, celui des x' lui est intérieur, tandis que ceux des y' et des z' lui sont extérieurs. Nous ne considérerons de ce cône que la nappe qui s'étend du côté des x' positives.

4. Cela posé, concevons la surface sphérique dont le centre est au sommet du cône et dont le rayon $=1$. Le cône visuel coupe cette surface suivant une ellipse sphérique dont le centre intérieur est le point où la surface sphérique est percée par l'axe positif des x'. Nous mesurerons l'angle solide du cône visuel par le rapport de l'aire de cette ellipse sphérique à l'aire de la surface totale de la sphère. Ainsi la question est ramenée à trouver l'aire de l'ellipse sphérique.

En rapportant les points de la surface sphérique à un système de coordonnées polaires, par les formules connues

$$x' = \cos\alpha\cos\theta,\quad y' = \sin\alpha\cos\theta,\quad z' = \sin\theta,$$

l'équation en α, θ de l'ellipse sphérique est la suivante

$$a\cos^2\alpha\cos^2\theta + b\sin^2\alpha\cos^2\theta + c\sin^2\theta = 0.$$

La quantité $-c\,\text{tang}^2\theta$ étant positive par hypothèse, il en est de même de $a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha$, et à plus forte raison de $a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha - c$; on peut donc mettre l'équation précédente sous la forme

$$(6)\qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha}}{\sqrt{a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha - c}},$$

où les radicaux sont pris positivement, parce qu'on n'a besoin de considérer que le quart d'ellipse situé dans la région des x', y', z' positives.

Or, la formule générale pour la quadrature indéfinie des aires sphériques est $\int \sin 6\, d\alpha$; si donc on remarque que notre figure sphérique est symétrique par rapport aux arcs de grands cercles $\alpha = 0$, $6 = 0$, on aura, en nommant Ω la valeur de l'angle solide en question,

$$(7) \qquad \Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_0} d\alpha \frac{\sqrt{a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha}}{\sqrt{a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha - c}},$$

α_0 étant la valeur de α qui répond à $6 = 0$, c'est-à-dire la valeur réelle et positive donnée par l'équation

$$b\,\text{tang}^2\alpha_0 + a = 0 \quad \text{ou} \quad \sin^2\alpha_0 = \frac{a}{a-b}.$$

Posons

$$(8) \qquad a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha = \lambda,$$

où λ est une nouvelle variable. En écrivant cette relation sous la forme

$$a - (a-b)\sin^2\alpha = \lambda,$$

on voit facilement que depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \alpha_0$, λ est toujours positive et décroissante depuis la valeur $\lambda = a$ jusqu'à la valeur $\lambda = 0$, de sorte que les quantités $a - \lambda$, $\lambda - b$, $\lambda - c$ ne deviennent jamais négatives dans les limites de l'intégration. On peut donc tirer de l'équation (8)

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\lambda - b}}{\sqrt{a-b}}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{a-\lambda}}{\sqrt{a-b}},$$

et par suite

$$d\alpha = -\frac{d\lambda}{2\sqrt{a-\lambda}\sqrt{\lambda - b}},$$

formules dans lesquelles les radicaux sont pris positivement par la même raison que ci-dessus.

Moyennant cette transformation, la formule (7) devient

$$\Omega = -\frac{1}{2\pi}\int_a^0 \frac{d\lambda\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(a-\lambda)(\lambda-b)(\lambda-c)}}.$$

Or a, b, c étant les trois racines de l'équation $\Delta = 0$, le polynôme Δ ne peut différer que par un facteur numérique de l'expression $(a-\lambda)(\lambda-b)(\lambda-c)$; mais le terme en λ^3 a évidemment même coefficient dans les deux expressions, donc celles-ci sont absolument identiques, et conséquemment on peut poser

$$\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^a d\lambda\,\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\Delta}}.$$

Telle est la formule qui donne la valeur de l'angle en question.

5. On peut vérifier cette formule en faisant des hypothèses spéciales :

1° Supposons en premier lieu que la surface donnée soit une sphère, c'est-à-dire que l'on ait

$$2\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - r^2,$$

et que le point fixe soit pris sur l'axe des x à une distance h de l'origine $(h > r)$. On aura dans ce cas

$$x_0 = h,\quad y_0 = z_0 = 0,\quad 2\varphi_0 = h^2 - r^2,$$

et par suite

$$A = r^2,\quad B = -(h^2 - r^2),\quad C = -(h^2 - r^2),$$
$$D = E = F = 0,$$
$$\Delta = (r^2 - \lambda)(h^2 - r^2 - \lambda)^2,\quad a = r^2;$$

d'où enfin

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{r^2} \frac{d\lambda \sqrt{\lambda}}{(h^2 - r^2 + \lambda) \sqrt{r^2 - \lambda}}.$$

En posant

$$\lambda = \frac{r^2 t^2}{1 + t^2},$$

où t est une nouvelle variable, cette formule se transforme en la suivante

$$\Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + \left(\frac{ht}{\sqrt{h^2 - r^2}} \right)^2},$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\Omega = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{h^2 - r^2}}{h} \right).$$

On reconnaît immédiatement l'exactitude de ce résultat, si l'on se rappelle la formule connue pour la mesure de la zone sphérique.

2° Supposons maintenant que la surface soit quelconque, mais que le point (x_0, y_0, z_0) soit pris sur elle. Il est évident en ce cas que, d'après les conventions adoptées, on doit trouver un angle visuel représenté par $\frac{1}{2}$.

Or φ_0 étant $= 0$ par hypothèse, on a ici

$$A = \left(\frac{d\varphi_0}{dx_0} \right)^2, \quad D = \frac{d\varphi_0}{dy_0} \frac{d\varphi_0}{dz_0},$$

$$B = \left(\frac{d\varphi_0}{dy_0} \right)^2, \quad E = \frac{d\varphi_0}{dz_0} \frac{d\varphi_0}{dx_0},$$

$$C = \left(\frac{d\varphi_0}{dz_0} \right)^2, \quad F = \frac{d\varphi_0}{dx_0} \frac{d\varphi_0}{dy_0},$$

d'où l'on tire, après des réductions faciles,

$$\Delta = \lambda^2(a-\lambda), \quad a = \left(\frac{d\varphi_0}{dx_0}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dy^0}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dz_0}\right)^2.$$

La formule générale donne donc dans le cas actuel

$$\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^a \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(a-\lambda)}}.$$

Posons

$$\lambda = a\sin^2\theta, \quad a-\lambda = a\cos^2\theta,$$

d'où

$$d\lambda = 2a\sin\theta\cos\theta\, d\theta.$$

En introduisant ces valeurs, la formule ci-dessus devient simplement

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2},$$

ce qui donne le résultat prévu.

NOTE

Sur une propriété des lignes de courbure des surfaces du second ordre à centre;

Par M. DURRANDE,
Professeur au lycée de Moulins.

Théorème. — *Les plans tangents à une surface du second ordre à centre, parallèles aux plans des sections diamétrales dont un des axes est constant, touchent la surface suivant une de ses lignes de courbure.*

(Je démontre ce théorème pour l'ellipsoïde, mais on

appliquera, sans difficulté, la démonstration aux autres surfaces à centre.)

J'établis d'abord les trois lemmes suivants :

LEMME I. — *L'intersection d'un ellipsoïde représenté par l'équation*

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

et d'une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

est une conique sphérique située sur le cône

$$(2) \qquad \frac{a^2 - R^2}{a^2} x^2 + \frac{b^2 - R^2}{b^2} y^2 + \frac{c^2 - R^2}{c^2} z^2 = 0.$$

LEMME II. — *Si, par un diamètre* OA *d'un ellipsoïde et par une tangente à la surface perpendiculaire à* OA, *on fait passer un plan diamétral, la droite* OA *est un axe de la section faite par ce plan dans l'ellipsoïde.*

LEMME III. — *Le cône représenté par l'équation* (2) *est l'enveloppe des sections diamétrales de l'ellipsoïde dont l'un des axes est constant et égal à* 2R.

Ce lemme est une conséquence bien simple du précédent ; en effet, tout plan tangent au cône (2) contient un diamètre OA, génératrice du cône, et la tangente à la conique sphérique (1), (2) ; or, cette tangente est perpendiculaire à OA, rayon de la sphère, donc OA est un axe de la section elliptique faite par le plan tangent au cône (2) dans la surface (1).

Ces lemmes établis, proposons-nous de chercher le lieu des points de contact des plans tangents à l'ellipsoïde (1), parallèles aux plans tangents du cône (2).

Soient x', y', z' les coordonnées du point de contact

de l'un d'eux ; elles doivent satisfaire à l'équation

$$(3) \qquad \frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} + \frac{z'z}{c^2} = 1$$

du plan tangent à l'ellipsoïde (1).

D'autre part, l'équation d'un plan tangent au cône (2) est

$$(4) \qquad \frac{a^2 - R^2}{a^2} x''x + \frac{b^2 - R^2}{b^2} y''y + \frac{c^2 - R^2}{c^2} z''z = 0,$$

x'', y'', z'' désignant les coordonnées d'un point quelconque de l'arête de contact.

Exprimons que les plans (3) et (4) sont parallèles, nous aurons les relations

$$\frac{a^2 - R^2}{a^2} x'' = \frac{x'}{a^2},$$

$$\frac{b^2 - R^2}{b^2} y'' = \frac{y'}{b^2},$$

$$\frac{c^2 - R^2}{c^2} z'' = \frac{z'}{c^2},$$

d'où l'on peut tirer les valeurs de x'', y'', z'' que l'on transportera dans l'équation

$$(5) \qquad \frac{a^2 - R^2}{a^2} x''^2 + \frac{b^2 - R^2}{b^2} y''^2 + \frac{c^2 - R^2}{c^2} z''^2 = 0,$$

obtenue en exprimant que les coordonnées x'', y'', z'' satisfont à l'équation du cône (2).

L'élimination de x'', y'', z'' entre les quatre équations précédentes fournit l'équation suivante :

$$(6) \qquad \frac{x'^2}{a^2(a^2 - R^2)} + \frac{y'^2}{b^2(b^2 - R^2)} + \frac{z'^2}{c^2(c^2 - R^2)} = 0,$$

laquelle contient le lieu que nous cherchons. L'équa-

tion (6) est celle d'un cône, lieu des positions des diamètres conjugués des sections diamétrales dont l'un des axes est égal à $2R$.

Pour mettre en évidence la nature du lieu géométrique que je cherche, je remarque que dans le système des équations

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}+\dfrac{z'^2}{c^2}=1, \\ \dfrac{x'^2}{a^2(a^2-R^2)}+\dfrac{y'^2}{b^2(b^2-R^2)}+\dfrac{z'^2}{c^2(c^2-R^2)}=0 \end{cases}$$

qui le définissent, on peut remplacer l'une des équations par une autre obtenue en retranchant la seconde de la première, ce qui donne

$$(8)\qquad \frac{x'^2}{a^2-R^2}+\frac{y'^2}{b^2-R^2}+\frac{z'^2}{c^2-R^2}=1.$$

Cette équation (8), avec la première du groupe (7), donne le lieu cherché.

Or, il est facile de voir, en supprimant les accents devenus inutiles, que la première équation du groupe (7) est celle de l'ellipsoïde proposé; l'équation (8) est celle d'un hyperboloïde homofocal coupant, par suite, orthogonalement l'ellipsoïde proposé. *Donc l'intersection de ces deux surfaces est une ligne de courbure sur chacune d'elles, ce qui démontre le théorème énoncé.*

Remarque. — Soient R, R' les deux demi-axes d'une section faite dans un ellipsoïde par un plan diamétral; a, b, c les trois demi-axes principaux; si a est le plus grand, c le plus petit, si en outre R est plus grand que R', on aura les inégalités

$$a > R > b > R' > c.$$

Il résulte du théorème précédent que les deux lignes de

courbure qui passent au point de contact du plan tangent parallèle au plan diamétral (R, R′) seront données par les équations

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ &\frac{x^2}{a^2-R^2}+\frac{y^2}{b^2-R^2}+\frac{z^2}{c^2-R^2}=1,\\ &\frac{x^2}{a^2-R'^2}+\frac{y^2}{b^2-R'^2}+\frac{z^2}{c^2-R'^2}=1,\end{aligned}\right.$$

qui représentent trois surfaces homofocales et faisant partie d'un système triple de surfaces orthogonales. Il est aisé de reconnaître que la première étant un ellipsoïde, la seconde est un hyperboloïde à deux nappes, et la troisième un hyperboloïde à une nappe.

Corollaire. — Si on prend les pôles des plans tangents à un ellipsoïde, par rapport à un autre ellipsoïde dont les axes soient les inverses des moyennes proportionnelles des axes du premier pris deux à deux, on a la conséquence suivante :

Le lieu des pôles des plans qui touchent l'ellipsoïde aux divers points d'une ligne de courbure est une conique sphérique située sur le cône asymptote de l'hyperboloïde homofocal qui détermine la ligne de courbure.

Le plan tangent à l'ellipsoïde représenté par la première des équations (9) a pour équation

$$(10)\qquad \frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{z'z}{c^2}=1,$$

x', y', z' étant les coordonnées du point de contact.

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées du pôle de ce plan par rapport à l'ellipsoïde

$$(11)\qquad bcx^2+acy^2+abz^2=1,$$

dont les axes sont les inverses des moyennes géométriques des axes du premier pris deux à deux.

On sait que les coordonnées du pôle d'un plan par rapport à une surface du second ordre (11) permettent d'écrire l'équation de ce plan sous la forme

$$(12) \qquad bc\xi x + ac\eta y + ab\zeta z = 1.$$

Si les équations (10) et (12) représentent le même plan, on doit avoir les relations

$$\frac{x'}{a^2} = bc\xi, \quad \frac{y'}{b^2} = ac\eta, \quad \frac{z'}{c^2} = ab\zeta.$$

Si l'on tire de ces relations les valeurs de x', y', z', et qu'on les porte dans les deux premières équations du groupe (9) par exemple, ce qui exprime que le point (x', y', z') décrit une ligne de courbure de l'ellipsoïde, on en déduit

$$(13) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{a^2 b^2 c^2},$$

ce qui montre que le pôle (ξ, η, ζ) se déplace sur une sphère; on a de plus par la seconde équation

$$\frac{a^2\xi^2}{a^2 - R^2} + \frac{b^2\eta^2}{b^2 - R^2} + \frac{c^2\zeta^2}{c^2 - R^2} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2},$$

d'où, en retranchant de la précédente,

$$(14) \qquad \frac{\xi^2}{a^2 - R^2} + \frac{\eta^2}{b^2 - R^2} + \frac{\zeta^2}{c^2 - R^2} = 0,$$

équation du cône asymptote de l'hyperboloïde représenté par la seconde équation du groupe (9).

Donc le lieu des pôles (ξ, η, ζ) est représenté par l'ensemble des équations (13) et (14). C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 652

(voir page 190);

PAR M. LEMASNE,
Élève du lycée de Vendôme (classe de M. Jaufroid).

Soient P *et* P' *deux polyèdres convexes semblables et semblablement placés, le premier intérieur au second. Prenons sur chaque face de* P' *un point et joignons-le aux sommets de la face homologue du polyèdre* P. *Nous formerons ainsi un polyèdre* Q, *à faces triangulaires, inscrit dans le polyèdre* P' *et circonscrit au polyèdre* P. *Soit* Q' *un quatrième polyèdre formé en joignant un point pris sur chaque face de* P *aux sommets de la face homologue de* P'. *En désignant par* P, P', Q, Q', *les volumes des quatre polyèdres, on aura*

$$Q = \sqrt[3]{P^2 P'}, \quad Q' = \sqrt[3]{P P'^2},$$

d'où l'on déduira

$$QQ' = PP' \quad \text{et} \quad \frac{Q}{Q'} = \sqrt[3]{\frac{P}{P'}}.$$

Les polyèdres P' et P étant semblables et semblablement placés, et le polyèdre P étant intérieur au polyèdre P', les droites qui joignent les sommets homologues concourent au centre de similitude, qui est intérieur aux deux polyèdres.

Soient H et h les distances du centre de similitude à deux faces homologues, on a

$$\frac{H}{h} = \sqrt[3]{\frac{P'}{P}}.$$

Ce rapport est constant, ainsi que les suivants :

$$\frac{H-h}{H}, \quad \frac{H-h}{h}.$$

Cela posé, le volume Q est égal au volume P, plus la somme des pyramides ayant respectivement pour bases les faces de P et leurs sommets sur les faces de P′, somme que je représente par S.

Soit A l'une de ces pyramides, et A′ la pyramide ayant pour sommet le centre de similitude et même base que la pyramide A. On aura

$$\frac{A}{A'} = \frac{H-h}{h}.$$

Le second membre étant constant, si on représente par B et B′, C et C′,..., les autres pyramides analogues, on aura

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \ldots = \frac{H-h}{h} = \frac{S}{P},$$

puisque l'on a

$$P = A' + B' + C' + \ldots,$$

d'où

$$S = P \cdot \frac{H-h}{h},$$

et par suite

$$Q = P + P \cdot \frac{H-h}{h} = P \cdot \frac{H}{h} = \sqrt[3]{P^2 P'}.$$

Le volume Q′ est égal au volume P′, moins la somme des pyramides ayant respectivement pour bases les faces de P′, et leurs sommets sur les faces de P ; je représente cette somme par S′.

Soit M une de ces pyramides, et M′ la pyramide ayant pour sommet le centre de similitude et même base que M.

On aura

$$\frac{M}{M'} = \frac{H-h}{H}.$$

Le second membre étant constant, si on représente par N et N', R et R',..., les autres pyramides analogues, on aura

$$\frac{M}{M'} = \frac{N}{N'} = \frac{R}{R'} = \ldots = \frac{H-h}{H} = \frac{S'}{P'},$$

puisque l'on a

$$P' = M' + N' + R' + \ldots,$$

d'où

$$S' = P'.\frac{H-h}{H},$$

et par suite

$$Q' = P' - P'.\frac{H-h}{H} = P'.\frac{h}{H} = \sqrt[3]{PP'^2}.$$

On déduit immédiatement des valeurs de Q et de Q'

$$QQ' = PP' \quad \text{et} \quad \frac{Q}{Q'} = \sqrt[3]{\frac{P}{P'}}.$$

Note. — La même question a été résolue, à peu près de la même manière, par MM. Bardelli, de Milan; Mogni, de Tortone; Demmler, du lycée de Rouen (classe de M. Vincent).

M. Laval, élève du lycée de Lyon, commence par démontrer les deux dernières égalités en faisant voir d'abord qu'on a, k désignant le rapport de similitude des deux polyèdres P et P',

$$Q = \frac{P}{k}, \quad Q' = P'k;$$

il en déduit ensuite les deux premières égalités.

QUESTIONS.

664. Dans tout triangle inscrit dans une conique, et dont deux des côtés sont tangents à une seconde conique, le troisième côté enveloppe une conique passant par les points d'intersection des deux premières.

(CH. DELEVAQUE.)

665. *Sur des limaçons de Pascal.* — Étant donnée une série de limaçons de Pascal, décrits avec la même circonférence et ayant même point double, par ce point on trace une transversale et on fait passer une circonférence par le point double et par chaque point d'intersection, tangente à la courbe en ce point : *toutes ces circonférences ont même axe radical, et lorsque la transversale tourne autour du point double, cet axe radical tourne autour de ce point, et le second point commun à toutes ces circonférences décrit un cercle.*

(CH. DELEVAQUE.)

666. Je transcris l'équation de la courbe parallèle à l'ellipse, trouvée par M. Catalan (*Nouvelles Annales*, t. III, p. 553) :

$$
\begin{aligned}
&(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^2(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^2\\
&+4a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^3-27a^4b^4k^4\\
&+18a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)\\
&\quad\times(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)\\
&+4(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^3=0.
\end{aligned}
$$

Il faut démontrer que

1° Si l'on remplace dans cette équation x, y, k respec-

tivement par $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, on aura l'équation de la courbe de Talbot, que M. Tortolini a obtenue le premier.

2° Si l'on remplace dans la même équation x, y, k respectivement par $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$, $k+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, on aura l'équation de la courbe, enveloppe des droites menées par les points de la courbe parallèle à l'ellipse, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, perpendiculairement aux rayons vecteurs issus du centre. (*Généralisation de la courbe de Talbot.*) (Strebor.)

667. *Théorème à démontrer.* — L'enveloppe des circonférences ayant leurs centres sur une circonférence C, et tangentes à un diamètre AB de C, est l'épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence moitié moindre que C, roulant sur C.

Question. — Si l'on remplace le diamètre AB par une droite quelconque, l'enveloppe est-elle encore une épicycloïde? (E. Catalan.)

DES SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES;

Par M. Jos. SIVERING,
Ingénieur.

I. La résolution des systèmes de deux équations algébriques à pareil nombre d'inconnues présente, comme on sait, deux sortes de difficultés. Dans le cours des calculs, tantôt des solutions se perdent, tantôt il s'introduit des solutions étrangères à la question. Parmi les nombreuses recherches auxquelles cette matière a donné lieu, les plus complètes sont celles publiées par M. Bret dans le XVe Ca-

hier du *Journal de l'École Polytechnique,* sous le titre de *Mémoire sur la Méthode du plus grand commun diviviseur appliquée à l'élimination.* M. Bret, en appliquant sa méthode à deux équations générales, l'une du sixième, l'autre du cinquième degré, donne le moyen de former une première équation à une inconnue du cent vingt-deuxième degré, qui contient les valeurs réelles et étrangères réunies, puis une autre équation du quatre-vingt-douzième degré, contenant les valeurs étrangères seules. Ces équations formées, il reste à diviser la première par la seconde, et le quotient du trentième degré, égalé à zéro, ne donnera plus que les valeurs réelles. On conçoit combien la formation d'équations de degrés aussi élevés est peu praticable. Aussi le système de M. Bret, quoique plus complet que d'autres, dégénère-t-il bien vite en une méthode de pure spéculation.

On a eu le tort, dans les investigations sur la matière, de laisser les facteurs étrangers s'accumuler, pour les écarter seulement lorsque l'équation finale est formée. On n'avait pas tiré parti de ce que les valeurs étrangères s'introduisent dans les polynômes avant la formation de l'équation finale, circonstance qui permet de classer ces valeurs une à une, au fur et à mesure qu'elles se produisent, sans en affecter les calculs extérieurs.

Nous établirons cette proposition, qui est de nature à simplifier la question des valeurs étrangères; et nous prendrons occasion d'exposer, en la complétant, la théorie des valeurs dites perdues. Nous le ferons en suivant la méthode consistant dans l'élimination successive des premiers et derniers termes, préparés par multiplication, au lieu d'employer le procédé des divisions successives, toujours plus compliqué et pourtant généralement suivi. Si ce dernier procédé obtient si souvent la préférence, c'est sans doute qu'on lui attribue la faculté

de se prêter mieux aux démonstrations. Comme, cependant, la méthode que nous allons suivre est incontestablement plus expéditive dans les applications, il n'est pas sans utilité de la raisonner et de montrer qu'elle permet de vaincre les difficultés de calcul par des moyens tout aussi bien fondés en théorie et plus efficaces dans la pratique.

II. Étant données deux équations à deux inconnues x et y du $m^{\text{ième}}$ degré,

$$(1) \quad \begin{cases} x^m + (ay + b)x^{m-1} + \ldots + (cy^{m-1} + \ldots + d)x \\ \quad + ey^m + \ldots + f = 0, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x^m + (a'y + b')x^{m-1} + \ldots + (c'y^{m-1} + \ldots + d')x \\ \quad + e'y^m + \ldots + f' = 0, \end{cases}$$

le moyen qui se présente naturellement pour trouver tous les couples de valeurs de x et de y capables d'y satisfaire, c'est d'éliminer une inconnue de manière à obtenir une équation finale ne contenant plus que l'autre inconnue et des nombres donnés. Pour établir des formules d'élimination, nous supposerons les deux équations ordonnées par rapport aux puissances descendantes de l'une des inconnues x, et la seconde inconnue y enveloppée dans les coefficients de x, comme le présentent déjà les expressions (1) et (2).

Les équations, ainsi préparées, prendront la forme suivante, où les coefficients g, h, k, l, etc., renfermeront y, mais pas x,

$$(3) \quad \begin{cases} gx^m + hx^{m-1} + kx^{m-2} + lx^{m-3} + \ldots \\ \quad + px^3 + qx^2 + rx + s = 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} g'x^m + h'x^{m-1} + k'x^{m-2} + l'x^{m-3} + \ldots \\ \quad + p'x^3 + q'x^2 + r'x + s' = 0. \end{cases}$$

Entre ces deux équations nous éliminerons le premier terme, en retranchant la seconde équation multipliée par

g de la première multipliée par g'. Nous éliminerons le dernier terme en retranchant la seconde multipliée par s de la première multipliée par s' et en divisant le reste par x. De la sorte, les équations proposées seront remplacées par les suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} (g'h - gh')x^{m-1} + (g'k - gk')x^{m-2} + (g'l - gl')x^{m-3} + \ldots \\ \qquad + (g'q - gq')x^2 + (g'r - gr')x + (g's - gs') = 0, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} (gs' - g's)x^{m-1} + (hs' - h's)x^{m-2} + (ks' - k's)x^{m-3} + \ldots \\ \qquad + (ps' - p's)x^2 + (qs' - q's)x + (rs' - r's) = 0. \end{cases}$$

Au moyen de cette opération, les équations proposées (3) et (4) seront remplacées par deux autres (5) et (6), dans lesquelles l'inconnue x est abaissée d'un degré. Le même procédé appliqué aux équations (5) et (6), puis successivement aux couples d'équations qui en résultent, les abaissera chaque fois d'un degré. C'est ainsi qu'en représentant, pour abréger, les équations (5) et (6) du degré $m - 1$ en x par

$$(7)\quad Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Dx^2 + Ex - F = 0,$$

$$(8)\quad Fx^{m-1} + Gx^{m-2} + Hx^{m-3} + \ldots + Kx^2 + Lx + M = 0,$$

on trouvera pour les transformées suivantes du degré $m - 2$ en x :

$$(9)\quad \begin{cases} (BF - AG)x^{m-2} + (CF - AH)x^{m-3} + \ldots \\ \qquad + (EF - AL)x - (F^2 + AM) = 0, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} (F^2 + AM)x^{m-2} + (BM + FG)x^{m-3} + \ldots \\ \qquad + (DM + FK)x + (EM + FL) = 0, \end{cases}$$

puis, pour les transformées du degré $m - 3$ en x,

$$(11)\quad \begin{cases} [(CF - AH)(F^2 + AM) - (BM + FG)(BF - AG)]x^{m-3} + \ldots \\ \qquad - [(F^2 + AM)^2 + (BF - AG)(EM + FL)] = 0, \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} [(F^2 + AM)^2 + (BF - AG)(EM + FL)]x^{m-3} + \ldots \\ + [(EF - AL)(EM + FL) + (DM + FK)(F^2 + AM)] = 0. \end{cases}$$

Ces opérations, en abaissant chaque fois x d'un degré, conduiront à un couple d'équations du premier degré en x de la forme

(13) $$x = f(y) \quad \text{et} \quad x = \varphi(y).$$

III. Les formules ci-dessus sont formées dans l'hypothèse que les multiplicateurs, tels que g et g', s et s', soient deux à deux premiers entre eux. Nous maintiendrons cette hypothèse plus bas, dans l'intérêt de la clarté des démonstrations. Les conséquences seraient les mêmes, s'il y avait des diviseurs communs, seulement elles porteraient sur les multiplicateurs simplifiés. Si, par exemple, nous avions $g = \gamma\lambda$ et $g' = \gamma'\lambda$, les multiplieateurs ne seraient plus g et g', mais bien γ et γ', et c'est à ces dernières expressions que s'appliqueraient les propositions à établir.

IV. Reprenons les équations (13). On en déduit immédiatement $f(y) = \varphi(y)$, qui ne renferme plus x, et qui dès lors est l'équation finale. Comme les égalités n'ont pas été détruites par les diverses transformations opérées, il semble que tous les couples de valeurs de x et de y qui satisfont aux équations proposées satisferont aussi aux équations $x = f(y)$ et $f(y) = \varphi(y)$, et réciproquement, de sorte qu'il ne resterait qu'à résoudre ces deux dernières équations. Cela serait exact s'il n'était pas survenu de perturbation dans le cours du calcul. Mais les facteurs en y, qui ont servi de multiplicateurs pour l'élimination, peuvent introduire dans les résultats des solutions étrangères à la question. Il peut aussi se perdre des valeurs appartenant à la question, par suite de la suppression, dans le cours du calcul, de quelque facteur commun en y. Ces circonstances rendent l'équation finale incertaine. Nous allons nous occuper successivement des valeurs étran-

gères et des valeurs perdues, et donner des moyens faciles de lever tous les doutes.

V. *Des valeurs étrangères.* — L'inspection des résultats trouvés plus haut montre que, passé les équations initiales, la première équation de chaque couple a pour dernier terme le coefficient, pris en signe contraire, du premier terme de la seconde équation. C'est ainsi que le dernier terme de l'équation (5) est $g's - gs'$, et que le premier terme de l'équation (6) a pour coefficient $gs' - g's$. De même l'équation (9) se termine par le terme

$$-(F^2 + AM)$$

et l'équation (10) commence par $F^2 + AM$.

Ce sont précisément *ces fonctions qui, deux fois facteurs dans l'élimination, introduisent des solutions étrangères dans les résultats. Ils se reproduisent comme facteurs communs à tous les coefficients du couple de transformées de deux degrés inférieur en x.*

Pour le faire voir, il suffira de démontrer que l'expression F, qui occupe ladite position dans les équations du $(m-1)^{ième}$ degré (7) et (8), apparaît comme facteur commun dans les équations du $(m-3)^{ième}$ degré (11) et (12). Mettons dans ces deux dernières F en évidence, et elles deviendront

$$(14)\left\{\begin{aligned} &[F(CF^2 - AFH - B^2M - BFG + AG^2 + ACM) \\ &\qquad + AM(BG - AH)]x^{m-3} + \ldots \\ &+ [F(AGL - BEM - BFL - F^3 - 2AMF) \\ &\qquad - AM(AM - EG)] = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(15)\left\{\begin{aligned} &[-F(AGL - BEM - BFL - F^3 - 2AMF) \\ &\qquad + AM(AM - EG)]x^{m-3} + \ldots \\ &+ [F(E^2M - EFL - AL^2 + F^2K + AKM + DFM) \\ &\qquad + AM(DM - EL)] = 0. \end{aligned}\right.$$

La fonction F se trouve être explicitement facteur commun à une partie des coefficients. Il reste à faire voir qu'elle l'est aussi dans l'autre, savoir, dans

$$BG - AH, \quad AM - EG, \ldots, \quad DM - EL.$$

A cet effet, remarquons que les coefficients des équations (7) et (8) ne sont que des abréviations de ceux des équations (5) et (6), que nous avons

$$A = g'h - gh', \quad B = g'k - gk',$$

et ainsi de suite. Il viendra donc

$$\begin{aligned} BG - AH &= (g'k - gk')(hs' - h's) - (g'h - gh')(ks' - k's) \\ &= (gs' - g's)(h'k - hk') = F(h'k - hk'), \\ AM - EG &= (g'h - gh')(rs' - r's) - (g'r - gr')(hs' - h's) \\ &= (gs' - g's)(hr' - h'r) = F(hr' - h'r), \\ DM - EL &= (g'q - gq')(rs' - r's) - (g'r - gr')(qs' - q's) \\ &= (gs' - g's)(qr' - q'r) = F(qr' - q'r). \end{aligned}$$

On trouve donc F comme facteur commun à tous les termes des coefficients des équations (11) et (12).

VI. Cette propriété importante donne le moyen de débarrasser les équations des facteurs étrangers à mesure qu'ils se produisent. A cet effet, *il faut diviser chaque couple de transformées par le coefficient qui termine la première et commence la seconde des deux équations formant le couple de deux degrés plus élevé en x.*

Cette opération n'aura pas seulement l'avantage d'écarter les valeurs étrangères, mais elle simplifiera encore singulièrement les calculs ultérieurs.

F n'est pas le seul multiplicateur qui serve à passer des transformées du degré $m-1$ aux transformées suivantes; il y a encore A et M. Mais ces expressions ne

peuvent devenir facteurs communs au même titre que F; c'est ce qu'il est aisé de reconnaître à l'inspection des résultats trouvés (14) et (15). Seulement A et M contribuent à former dans le degré $m-2$ le facteur générateur de solutions étrangères, facteur qui sera F^2+AM.

VII. Quand l'une des équations (13), par exemple $x=f(y)$, présente la valeur de x sous une forme suffisamment simple, on peut s'assurer de l'exactitude des résultats de la manière suivante. On remplacera x par sa valeur $f(y)$ dans les équations proposées (3) et (4). On aura alors deux équations en y seule, qui devront exister simultanément, et dont, par conséquent, le plus grand commun diviseur formera la véritable équation finale.

VIII. *Des valeurs perdues.* — Des solutions inhérentes à la question se perdent lorsque dans l'une des transformées on trouve un facteur commun à tous les coefficients des termes en x, et qu'on supprime ce facteur comme inutile. Supposons que Y soit un pareil facteur, trouvé pour la première fois dans l'équation (9) et autre, bien entendu, que les facteurs générateurs de valeurs étrangères.

Ce facteur Y *sera un polynôme premier avec les coefficients* A *et* F *des transformées précédentes.*

Pour le faire voir, on peut, en vertu de l'hypothèse, poser des identités de la forme

$$(16)\quad \begin{cases} BF-AG=PY, & CF-AH=QY,\ldots, \\ EF-AL=RY, & F^2+AM=SY,\ldots \end{cases}$$

Si Y avait un facteur commun μ avec A, par exemple, les termes AG et PY de la première des identités (16) seraient affectés de ce facteur μ, donc l'autre terme BF le serait aussi. Or, F étant premier avec A (III) ne pourrait pas l'être, ce serait donc B qui aurait μ pour diviseur.

Les identités suivantes montrent que C,..., E seraient dans le même cas. Par conséquent l'équation (7) admettrait un facteur commun μ, contrairement à l'hypothèse qui veut que ce facteur apparaisse pour la première fois dans l'équation (9).

IX. *Le facteur* Y, *commun à l'équation* (9), *le sera aussi à l'équation* (10).

Le premier coefficient de l'équation (10) vaut $-SY$ et admet Y comme facteur. De plus, les identités $BF - AG = PY$ et $F^2 + AM = SY$ étant multipliées respectivement par M et G, puis ajoutées, donneront $F(BM + FG) = (MP + GS)Y$, identité dans laquelle F est premier avec Y, et qui partant ne peut exister qu'autant que $BM + FG$ soit affecté du facteur Y. Donc le coefficient du terme en x^{m-3} de l'équation (10) est divisible par Y. Au moyen des autres identités (16), on peut démontrer de même que les coefficients ultérieurs de l'équation (10) sont divisibles par Y.

X. *En posant* $Y = 0$, *les équations* (7) *et* (8) *se réduisent à une seule et même équation.*

Pour le démontrer, remarquons que les identités (16) donnent

$$B = \frac{PY + AG}{F}, \quad C = \frac{QY + AH}{F},$$

$$E = \frac{RY + AL}{F}, \quad F = \frac{SY - AM}{F}.$$

Ces expressions de B, C, E, F, étant remplacées dans l'équation (7), la transforment en

$$A.x^{m-1} + \frac{PY + AG}{F}x^{m-2} + \ldots + \frac{RY + AL}{F}x - \frac{SY - AM}{F} = 0.$$

En faisant maintenant $Y = 0$ et multipliant par $\frac{F}{A}$, on obtient l'équation (8).

XI. *L'équation* Y = o *et l'une ou l'autre des transformées* (7) *et* (8) *forment un système de solutions du problème, et sont le seul système auquel donne lieu le polynôme* Y *annulé.*

D'abord nous pouvons admettre que les équations (7) et (8) ne renferment pas de valeurs étrangères, puisque nous avons appris à les écarter dès leur formation. D'ailleurs, ces transformées dérivent des équations initiales, et sont satisfaites l'une et l'autre par Y = o. Enfin le facteur commun, n'étant apparu que dans les transformées (9) et (10), ne peut avoir fait évanouir des solutions dans les transformations précédentes, de sorte qu'*il serait superflu de remonter aux équations initiales pour les combiner avec le facteur égalé à zéro, dans l'espoir d'obtenir un plus grand nombre de solutions.*

XII. Ainsi, pour retrouver les valeurs dites perdues, il faut procéder comme suit : *Dès que, dans l'une des transformées, il se présente un facteur commun en* y, *autre que celui générateur des solutions étrangères, il faut égaler ce facteur à zéro, remplacer les valeurs de* y *que cette équation donnera dans l'une ou l'autre des transformées de l'ordre précédent, laquelle donnera à son tour les valeurs correspondantes de* x. On continuera ensuite l'élimination sur les transformées débarrassées du facteur commun, jusqu'à ce qu'on obtienne les équations finales

$$x = f(y), \quad x = \varphi(y) \quad \text{et} \quad f(y) = \varphi(y),$$

qui donneront les autres systèmes de valeurs des inconnues.

Nous avons démontré que le facteur Y, commun à l'une des transformées, l'est également à l'autre transformée du même couple. Si donc on négligeait de le supprimer, il se reproduirait dans les transformées suivantes.

En l'égalant alors à zéro, et en remontant d'un degré, on trouverait évidemment pour x des valeurs de la forme $\frac{0}{0}$. Il est donc essentiel de supprimer les facteurs communs des coefficients, *dès qu'ils se présentent*, non-seulement pour simplifier les calculs, et pour obtenir toutes les solutions du problème, mais encore pour ne pas être conduit à des résultats propres à induire en erreur.

XIII. Quoique les valeurs perdues ne fassent pas partie de celles que donne l'équation finale, leur existence n'est pourtant pas un incident, mais un phénomène tout à fait normal. L'équation de la forme $x = f(y)$, que donne l'élimination, n'attribue à x qu'une valeur pour chaque valeur de y. Or, il est de l'essence des systèmes de deux équations à pareil nombre d'inconnues d'un degré supérieur au premier, et il doit arriver, généralement parlant, que plusieurs valeurs de x correspondent à une même valeur de y. Quand cette circonstance se présente, l'analyse doit l'indiquer par un indice quelconque, et c'est précisément alors qu'apparaissent les facteurs communs. Les solutions données par ces derniers sont donc pour le moins aussi conformes à l'esprit du calcul algébrique que celles données par l'équation finale.

La théorie qui vient d'être exposée sur les équations à deux inconnues en réduit la résolution à celle d'équations à une inconnue, que nous sommes parvenu à préparer de manière à ne renfermer ni plus ni moins que les solutions cherchées, et qui, dès lors, peuvent être traitées par les procédés en usage pour les problèmes à une inconnue. Cette théorie permet en outre de réduire à leur forme la plus simple les polynômes sur lesquels on a besoin d'opérer.

Il nous reste à l'appuyer de quelques applications.

Applications. — Soient à résoudre les deux équations du quatrième degré

$$x^4 + x^3 + yx^2 - 11y^3 - 5y^2 - 6y - 6 = 0,$$
$$x^4 + x^3 + xy - 9y^3 - 2y^2 - 5y - 6 = 0.$$

Les transformées du troisième degré seront

$$x^3 + (y - 1)x^2 + (2y^3 + 3y^2 + y) = 0,$$
$$(2y^3 + 3y^2 + y)x^3 + (-9y^3 - 2y^2 - 5y - 6)x^2$$
$$+ (-9y^4 + 9y^2 + 6)x + 11y^4 + 5y^3 + 6y^2 + 6y = 0.$$

Les transformées suivantes du deuxième degré deviendront, toutes multiplications faites,

$$(2y^4 + 10y^3 + 4y + 6)x^2 + (7y^4 - 12y^3 - y^2 - 6)x$$
$$- (4y^6 + 12y^5 + 24y^4 + 11y^3 + 7y^2 + 6y) = 0,$$
$$(4y^6 + 12y^5 + 24y^4 + 11y^3 + 7y^2 + 6y)x^2$$
$$- (18y^6 + 20y^5 + 31y^4 + 28y^3 + 23y^2 + 12y)x$$
$$+ (-18y^7 - 9y^6 + 7y^5 + 4y^4 + 6y^3 + 12y^2 + 6y) = 0.$$

Nous aurons ensuite pour transformées du premier degré

$$(64y^{10} + 256y^9 + 282y^8 + 215y^7 + 383y^6$$
$$+ 373y^5 + 195y^4 + 188y^3 + 144y^2 + 36y)x$$
$$- (16y^{12} + 60y^{11} + 138y^{10} + 588y^9$$
$$+ 902y^8 + 652y^7 + 659y^6 + 632y^5$$
$$+ 289y^4 + 168y^3 + 132y^2 + 36y) = 0,$$

et

$$(16y^{12} + 60y^{11} + 138y^{10} + 588y^9 + 902y^8$$
$$+ 652y^7 + 659y^6 + 632y^5 + 289y^4 + 168y^3$$
$$+ 132y^2 + 36y)x - (72y^{12} + 422y^{11} + 643y^{10}$$
$$+ 987y^9 + 1565y^8 + 1490y^7 + 1279y^6 + 1073y^5$$
$$+ 569y^4 + 264y^3 + 144y^2 + 36y) = 0.$$

Ainsi que nous l'avons démontré (V), ces deux équations doivent avoir pour facteur commun l'expression $2y^3 + 3y^2 + y$, qui est l'un des coefficients des transformées du troisième degré. En effet, en divisant les deux équations du premier degré par $2y^3 + 3y^2 + y$, nous trouvons les quotients exacts

$$(32y^7 + 80y^6 + 5y^5 + 60y^4 + 99y^3 + 8y^2 + 36y + 36)x$$
$$-(8y^9 + 18y^8 + 38y^7 + 228y^6 + 90y^5 + 77y^4$$
$$+ 169y^3 + 24y^2 + 24y + 36) = 0$$

et

$$(8y^9 + 18y^8 + 38y^7 + 228y^6 + 90y^5 + 77y^4$$
$$+ 169y^3 + 24y^2 + 24y + 36)x - (36y^9 + 157y^8$$
$$+ 68y^7 + 313y^6 + 279y^5 + 170y^4 + 245y^3$$
$$+ 84y^2 + 36y + 36) = 0.$$

Ces deux transformées du premier degré en x donnent pour équation en y seule

$$64y^{18} + 228y^{17} - 220y^{16} - 2888y^{15} - 3824y^{14}$$
$$+ 3399y^{13} + 17008y^{12} + 4124y^{11} + 6405y^{10}$$
$$+ 15831y^9 - 7109y^8 - 7904y^7 - 2034y^6 - 10492y^5$$
$$- 7104y^4 - 2376y^3 - 2304y^2 - 864y = 0.$$

Conformément à la règle établie (V), cette équation doit encore être divisée par

$$4y^6 + 12y^5 + 24y^4 + 11y^3 + 7y^2 + 6y,$$

coefficient qui termine l'une et commence l'autre des transformées du second degré. La division, étant opérée, donnera pour véritable équation finale

$$16y^{12} + 24y^{11} - 223y^{10} - 241y^9 + 1011y^8 - 190y^7 - 227y^6$$
$$+ 828y^5 - 406y^4 - 352y^3 + 120y^2 - 216y - 144 = 0,$$

dans laquelle les valeurs réelles de y sont $-0{,}732$, $+1$, $+2$ et $+2{,}732$.

Toute autre méthode que celle employée aurait conduit à des polynômes d'une puissance bien plus élevée.

Soit proposé pour second exemple :

$$x^3 + (3y - 1)x^2 - (y^2 + 2y + 8)x - 12y^3 = 0,$$
$$x^3 + (2y + 1)x^2 - (2y^2 + 2y + 9)x - 15y^3 = 0.$$

L'élimination des premiers, puis des derniers termes donne les deux transformées suivantes :

$$(y - 2)x^2 + (y^2 + 1)x + 3y^3 = 0,$$
$$x^2 + (7y - 9)x + 3y^2 - 2y - 4 = 0.$$

L'élimination suivante donnera

$$(-6y^2 + 23y - 17)x + 8y^2 - 8 = 0,$$
$$(-8y^2 + 8)x - 18y^4 + 25y^3 - y^2 - 2y - 4 = 0.$$

Ces deux équations ont un facteur commun $y - 1$. Avant de le supprimer, combinons-le avec l'une ou l'autre des transformées du second degré en x, et nous aurons

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Il y a donc un premier système de valeurs, représenté par

$$y - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Nous aurions obtenu les mêmes valeurs, mais nous n'en aurions pas eu d'autres, en remplaçant y par 1 dans les équations initiales. Celles-ci seraient devenues

$$x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = (x + 4)(x^2 - 2x - 3) = 0$$

et

$$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x + 5)(x^2 - 2x - 3) = 0.$$

Dans ces équations les facteurs $x + 4$ et $x + 5$ ne peu-

veut s'anéantir ensemble, et c'est le plus grand commun diviseur $x^2 - 2x - 3$ qui, égalé à zéro, donne les valeurs de x correspondantes à $y - 1 = 0$, comme nous l'avions déjà trouvé.

Les transformées du premier degré en x étant maintenant débarrassées du facteur commun $y - 1$ deviendront

$$(6y - 17)x - 8y - 8 = 0$$

et

$$(8y + 8)x + 18y^3 - 7y^2 - 6y - 4 = 0.$$

On en déduit

$$64(y + 1)^2 + (6y - 17)(18y^3 - 7y^2 - 6y - 4) = 0,$$

ou bien

$$+ 108y^4 - 348y^3 + 147y^2 + 206y + 132 = 0.$$

Telle est la véritable équation finale, attendu que, dans les transformées antérieures de deux degrés ou plus, il ne s'est pas trouvé de fonction en y formant le dernier coefficient de l'une et le premier de l'autre. La fonction de l'espèce $8y + 8$ ne remonte que d'un degré et n'introduit pas de valeurs étrangères dans l'équation finale.

Comme l'une des équations en x, savoir

$$(6y - 17)x - 8y - 8 = 0,$$

est assez simple, on peut, comme il a été dit (VII), s'assurer de l'absence des valeurs étrangères dans l'équation finale, en substituant dans les proposées à x sa valeur $\frac{8y + 8}{6y - 17}$. Les équations proposées deviendront alors

$$\begin{aligned} &- 648y^6 + 5436y^5 - 15126y^4 \\ &+ 14457y^3 + 890y^2 - 2500y - 4224 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- 3240y^6 + 26964y^5 - 75150y^4 \\ &+ 72687y^3 + 3744y^2 - 13176y - 21384 = 0. \end{aligned}$$

La recherche du plus grand commun diviseur entre ces deux polynômes montrera qu'ils valent

$$108y^4 - 348y^3 + 147y^2 + 206y + 132$$

multiplié respectivement par $-6y^2 + 31y - 32$ et par $-30y^2 + 153y - 162$, c'est-à-dire qu'ils ont pour plus grand commun diviseur l'expression que nous avons trouvée pour équation finale, ainsi que cela doit être.

QUESTION 647

(voir p. 144);

SOLUTION DE M. L. AUTOS, D'ATHÈNES.

I.

L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes est

$$a^2Y^2 + b^2X^2 = a^2b^2.$$

Si l'on appelle ε l'angle de la tangente avec l'axe des x, on a

$$\operatorname{tang}\varepsilon = -\frac{b^2X}{a^2Y};$$

le valeurs de X et de Y, tirées de ces deux équations, sont :

$$X = \frac{a^2\sin\varepsilon}{\sqrt{a^2\sin^2\varepsilon + b^2\cos^2\varepsilon}}, \quad Y = \frac{-b^2\cos\varepsilon}{\sqrt{a^2\sin^2\varepsilon + b\cos^2\varepsilon}}.$$

Soient l une longueur portée sur la tangente à partir du point de contact, et x, y les coordonnées de l'extrémité de l; si l'on pose, pour abréger,

$$(\delta) \qquad D^2 = a^2\sin^2\varepsilon + b^2\cos^2\varepsilon,$$

le principe des projections donne

$$x = l\cos\varepsilon + \frac{a^2}{D}\sin\varepsilon, \quad y = l\sin\varepsilon - \frac{b^2}{D}\cos\varepsilon.$$

L'élimination de ε entre ces deux équations donnera une relation entre x et y, qui sera l'équation du lieu. Cette élimination exige quelques précautions.

Divisons la première des équations précédentes par a et la seconde par b, élevons au carré et ajoutons; nous aurons

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = l^2D^2.$$

Cette équation donne l'auxiliaire D en fonction de x, y; si à l'équation (δ) on joint la relation

$$\sin^2\varepsilon + \cos^2\varepsilon = 1,$$

la résolution de ces deux équations, par rapport à $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$, donnera les égalités

$$\cos^2\varepsilon = \frac{a^2 - D^2}{c^2}, \quad \sin^2\varepsilon = \frac{D^2 - b^2}{c^2},$$

dans lesquelles, pour abréger, l'on a posé $a^2 - b^2 = c^2$. Si, maintenant, on multiplie la valeur de x par $\sin\varepsilon$, la valeur de y par $\cos\varepsilon$, et qu'on les retranche l'une de l'autre, il viendra

$$x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon = D;$$

en remplaçant, dans cette équation, $\sin\varepsilon$, $\cos\varepsilon$ et D par leurs valeurs trouvées ci-dessus, on obtient finalement

$$(\gamma)\left\{\begin{aligned} &\pm x\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-b^2(a^2+l^2)} \pm y\sqrt{a^2(b^2+l^2)-a^2y^2-b^2x^2} \\ &\qquad = \pm c\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}, \end{aligned}\right.$$

qui est l'équation du lieu. Si l'on chasse les radicaux, on

aura l'équation

$$[(x^2+y^2+c^2-l^2)(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)-a^2b^2l^2]^2$$
$$=4c^2x^2(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)[(a^2y^2+b^2x^2-b^2(a^2+l^2)],$$

qui est du huitième degré.

II.

Conservons la forme radicale (γ) de l'équation du lieu, parce qu'elle se prête mieux à une discussion facile.

Si l'on égale à zéro chacune des expressions placées sous les premiers radicaux, on a

$$a^2y^2+b^2x^2-b^2(a^2+l^2)=0,$$
$$a^2y^2+b^2x^2-a^2(b^2+l^2)=0.$$

Ce sont les équations de deux ellipses concentriques à l'ellipse proposée, semblables et semblablement placées, la première étant intérieure à la seconde.

La simple inspection de l'équation radicale (γ) de la courbe montre que cette courbe est toute comprise entre les deux ellipses auxiliaires dont nous venons de parler, car pour tout point situé intérieurement à la première le premier radical est imaginaire, et pour tout point extérieur à la seconde le second radical devient imaginaire. On voit aussi que la courbe est tangente à la première ellipse en quatre points symétriques deux à deux, par rapport aux axes, les équations de ces quatre points étant

$$y_1=\pm b,\quad x_1=\pm l;$$

et qu'elle est aussi tangente à la seconde ellipse en quatre points symétriques deux à deux par rapport aux axes, les équations de ces points étant

$$y_2=\pm l,\quad x_2=\pm a.$$

La courbe est formée de deux anneaux distincts : le

premier anneau est le lieu des extrémités de l comptée d'un côté de la tangente à partir du point de contact, et le second anneau, le lieu des extrémités de l comptée de l'autre côté de la tangente à partir du point de contact. Ces deux anneaux s'entre-croisent en quatre points situés sur les axes, et symétriques deux à deux par rapport au centre.

Si l'on suppose que la tangente à l'ellipse donnée glisse sur cette courbe de gauche à droite à partir de l'extrémité positive du petit axe, et qu'elle porte la longueur l comptée de gauche à droite à partir du point de contact, l'extrémité de l dans sa position initiale marquera le point où la courbe touche l'ellipse auxiliaire intérieure. Dans le mouvement de la tangente, l'extrémité de l s'éloigne de plus en plus de la circonférence de l'ellipse intérieure, rencontre l'axe des x en un point situé entre les deux ellipses auxiliaires, et ensuite rencontre l'ellipse extérieure au point de contact de la courbe avec cette ellipse. A partir de cet instant, elle s'éloigne de l'ellipse extérieure, rencontre l'axe des y en un point situé entre les deux ellipses auxiliaires, et se rapprochant de plus en plus de l'ellipse intérieure la rencontre au point de contact de cette ellipse avec la courbe. Ce point de contact est le symétrique du point initial par rapport au centre, et à partir de ce point les mêmes accidents se reproduisent, et dans le même ordre que dans la première moitié de l'anneau.

Si, dans le mouvement de la tangente, on avait porté la longueur l sur cette tangente à partir du point de contact, mais du côté opposé, l'extrémité de l aurait engendré l'autre anneau. Il est aisé de voir que ces deux anneaux sont égaux, et qu'on les amènerait à coïncidence en faisant tourner le premier autour du centre de l'ellipse, de façon que l'un des rayons de l'anneau prît une position

symétrique par rapport à l'axe des x, ou par rapport à l'axe des y.

III.

Si l'on suppose l égale à zéro, l'équation du lieu devient :

$$[\pm(x-c)\pm y\sqrt{-1}]\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}=0.$$

Le premier facteur est imaginaire ; le second, égalé à zéro, donne l'équation de l'ellipse proposée, comme cela se voit à priori.

Si, dans l'équation (γ), on suppose $b=a$, d'où $c=0$, cette équation devient

$$(\pm x\pm y\sqrt{-1})\sqrt{x^2+y^2-a^2-l^2}=0.$$

On voit donc que, lorsque l'ellipse proposée dégénère en cercle, le lieu (γ) se réduit à un cercle concentrique dont le rayon est $\sqrt{a^2+l^2}$, ainsi qu'on peut le reconnaître directement.

Terminons par l'énoncé des deux théorèmes suivants, qui se démontrent sans difficulté.

1° Lorsque la tangente à l'ellipse proposée a parcouru toute la circonférence de cette ellipse, la longueur l a balayé une aire égale à l'aire du cercle de rayon l.

2° La normale à la courbe en un point s'obtient en construisant l'hypoténuse du triangle rectangle dont les deux côtés sont : le premier, la longueur l comptée sur la tangente à l'ellipse donnée au point correspondant, à partir du point de contact ; et le second, le rayon de courbure en ce point de la même ellipse (*).

(*) M. Antos est prié de démontrer ces deux propositions. G.

NOTE SUR LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES;

PAR M. V.-A. LE BESGUE,
Correspondant de l'Institut.

I.

La transformation des coordonnées rectilignes, soit dans un plan, soit dans l'espace, devrait se faire par des formules semblables.

Si une droite OM, rapportée à trois plans coordonnés Oxy, Oxz, Oyz, faisant un angle trièdre de sommet O, et ayant pour arêtes Ox, Oy, Oz sur lesquelles se comptent les coordonnées positives, a pour équations

$$(1) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

a, b, c étant les coordonnées d'un point M pris à une distance $\mathrm{OM} = 1$ de l'origine, on aura l'équation de condition

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathrm{OM}}^2 = 1 = a^2 + b^2 + c^2 \\ + 2bc\cos(y, z) + 2ca\cos(z, x) + 2ab\cos(x, y). \end{array} \right.$$

Il faut remarquer que a étant, sur l'axe des x, la longueur de la projection de la droite $\mathrm{OM} = 1$, obtenue en menant par le point M un plan parallèle au plan yOz, la projection d'une longueur r, prise sur cette droite à partir du point O et dans le sens de OM, sera égale à ar.

D'après cela, si l'on prend trois nouveaux axes de coordonnées, passant par la même origine O, et ayant pour

équations

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}, & \text{axe des } x', \\ \dfrac{x}{a'} = \dfrac{y}{b'} = \dfrac{z}{c'}, & \text{axe des } y', \\ \dfrac{x}{a''} = \dfrac{y}{b''} = \dfrac{z}{c''}, & \text{axe des } z', \end{cases}$$

les nouvelles coordonnées étant x', y', z', on aura

$$(4)\quad \begin{cases} x = ax' + a'y' + a''z', \\ y = bx' + b'y' + b''z', \\ z = cx' + c'y' + c''z', \end{cases}$$

et les trois relations

$$(5)\quad \begin{cases} 1 = a^2 + b^2 + c^2 \\ \quad + 2bc\cos(y, z) + 2ca\cos(z, x) + 2ab\cos(x, y), \\ 1 = a'^2 + b'^2 + c'^2 \\ \quad + 2b'c'\cos(y, z) + 2c'a'\cos(z, x) + 2a'b'\cos(x, y), \\ 1 = a''^2 + b''^2 + c''^2 \\ \quad + 2b''c''\cos(y, z) + 2c''a''\cos(z, x) + 2a''b''\cos(x, y). \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(6)\quad \Delta = a(b'c'' - c'b'') + b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a''),$$

les équations (4) donneront

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta x' = (b'c'' - c'b'')x + (c'a'' - a'c'')y + (a'b'' - b'a'')z \\ \quad = a_1 x + a'_1 y + a''_1 z, \\ \Delta y' = (b''c - c''b)x + (c''a - a''c)y + (a''b - b''a)z \\ \quad = b_1 x + b'_1 y + b''_1 z, \\ \Delta z' = (bc' - cb')x + (ca' - ac')y + (ab' - ba')z \\ \quad = c_1 x + c'_1 y + c''_1 z. \end{cases}$$

Le plan qui passe par les droites Oy', Oz' étant repré-

senté par

$$Lx + My + Nz = 0,$$

on aura

$$La' + Mb' + Nc' = 0, \quad La'' + Mb'' + Nc'' = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{L}{b'c'' - c'b''} = \frac{M}{c'a'' - a'c''} = \frac{N}{a'b'' - b'a''}$$

ou

$$\frac{L}{a_1} = \frac{M}{a'_1} = \frac{N}{a''_1}.$$

On aura donc les équations suivantes :

$$(8) \quad \begin{cases} a_1 x + a'_1 y + a''_1 z = 0, & \text{pour le plan } y'Oz', \\ b_1 x + b'_1 y + b''_1 z = 0, & \text{pour le plan } z'Ox', \\ c_1 x + c'_1 y + c''_1 z = 0, & \text{pour le plan } x'Oy'. \end{cases}$$

Si l'on admettait que les trois droites Ox', Oy', Oz' fussent dans un même plan, on aurait de plus

$$La + Mb + Nc = 0,$$

et par suite

$$a(b'c'' - c'b'') + b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a'') = \Delta = 0.$$

Cette équation ne peut avoir lieu quand les trois droites Ox', Oy', Oz' ne sont pas dans un même plan, comme il arrive dans la transformation des coordonnées.

II.

Pour l'application suivante, il faut trouver l'équation d'un plan tangent à la surface à centre

$$(a) \qquad \alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 = 1$$

et parallèle au plan

$$(b) \qquad a_1 x + a'_1 y + a''_1 z = 0.$$

Il faut donc, en représentant par x', y', z' les coordonnées du point de contact, identifier les équations

$$\alpha x x' + \alpha' y y' + \alpha'' z z' = 1, \quad a_1 x + a'_1 y + a''_1 z = \delta,$$

en supposant

$$\alpha x'^2 + \alpha' y'^2 + \alpha'' z'^2 = 1.$$

On a donc

$$\alpha x' = \frac{a_1}{\delta}, \quad \alpha' y' = \frac{a'_1}{\delta}, \quad \alpha'' z' = \frac{a''_1}{\delta},$$

ou encore

$$x'\sqrt{\alpha} = \frac{a_1}{\delta\sqrt{\alpha}}, \quad y'\sqrt{\alpha'} = \frac{a'_1}{\delta\sqrt{\alpha'}}, \quad z'\sqrt{\alpha''} = \frac{a''_1}{\delta\sqrt{\alpha''}},$$

et comme l'on a

$$(x'\sqrt{\alpha})^2 + (y'\sqrt{\alpha'})^2 + (z'\sqrt{\alpha''})^2 = 1,$$

on en déduira

$$\delta^2 = \frac{a_1^2}{\alpha} + \frac{a'^2_1}{\alpha'} + \frac{a''^2_1}{\alpha''}.$$

Le plan tangent est donc

$$(c) \qquad a_1 x + a'_1 y + a''_1 z = \sqrt{\frac{a_1^2}{\alpha} + \frac{a'^2_1}{\alpha'} + \frac{a''^2_1}{\alpha''}}.$$

Comme le radical peut prendre le signe + ou le signe — 1, il y a deux plans tangents parallèles au plan (b).

En élevant au carré, on a l'équation

$$(d) \left\{ \begin{aligned} & a_1^2 x^2 + a'^2_1 y^2 + a''^2_1 z^2 + 2a'_1 a''_1 yz + 2a''_1 a_1 zx + 2a_1 a'_1 xy \\ & = \frac{a_1^2}{\alpha} + \frac{a'^2_1}{\alpha'} + \frac{a''^2_1}{\alpha''} \end{aligned} \right.$$

pour le système de ces deux plans.

III.

Soit une surface du second degré, ayant son centre à

l'origine et représentée par l'équation

$$(e)\qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = D.$$

Si l'on fait disparaître les rectangles en transformant les coordonnées par les formules (4) et que l'on trouve ainsi

$$(f)\qquad A_1 x'^2 + A'_1 y'^2 + A''_1 z'^2 = D,$$

on repassera à l'équation (e) au moyen des formules (7), et comme on obtient ainsi l'équation

$$\frac{A_1}{\Delta^2}(a_1 x + a'_1 y + a''_1 z)^2 + \frac{A'_1}{\Delta^2}(b_1 x + b'_1 y + b''_1 z)^2 + \frac{A''_1}{\Delta^2}(c_1 x + c'_1 y + c''_1 z)^2 = D,$$

on trouvera, en identifiant cette équation et l'équation (e),

$$(g)\qquad \begin{cases} A = \frac{1}{\Delta^2}(A_1 a_1^2 + A'_1 b_1^2 + A''_1 c_1^2), \\ A' = \frac{1}{\Delta^2}(A_1 a'^2_1 + A'_1 b'^2_1 + A''_1 c'^2_1), \\ A'' = \frac{1}{\Delta^2}(A_1 a''^2_1 + A'_1 b''^2_1 + A''_1 c''^2_1), \\ B = \frac{1}{\Delta^2}(A_1 a'_1 a''_1 + A'_1 b'_1 b''_1 + A''_1 c'_1 c''_1), \\ B' = \frac{1}{\Delta^2}(A_1 a''_1 a_1 + A'_1 b''_1 b_1 + A''_1 c''_1 c_1), \\ B'' = \frac{1}{\Delta^2}(A_1 a_1 a'_1 + A'_1 b_1 b'_1 + A''_1 c_1 c'_1). \end{cases}$$

Si l'on prend une seconde surface à centre ayant pour équation

$$(h)\qquad \alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 = 1,$$

et que l'on mène des plans tangents parallèles aux plans conjugués de la surface (e), plans dont les équations for-

ment le système (8), on aura, d'après l'équation (d), les trois équations suivantes :

$$(i)\quad\left\{\begin{aligned}
&a_1^2x^2+a_1'^2y^2+a_1''^2z^2+2a_1'a_1''yz+2a_1''a_1zx+2a_1a_1'xy\\
&\qquad=\frac{a_1^2}{\alpha}+\frac{a_1'^2}{\alpha'}+\frac{a_1''^2}{\alpha''},\\
&b_1^2x^2+b_1'^2y^2+b_1''^2z^2+2b_1'b_1''yz+2b_1''b_1zx+2b_1b_1'xy\\
&\qquad=\frac{b_1^2}{\alpha}+\frac{b_1'^2}{\alpha'}+\frac{b_1''^2}{\alpha''},\\
&c_1^2x^2+c_1'^2y^2+c_1''^2z^2+2c_1'c_1''yz+2c_1''c_1zx+2c_1c_1'xy\\
&\qquad=\frac{c_1^2}{\alpha}+\frac{c_1'^2}{\alpha'}+\frac{c_1''^2}{\alpha''}.
\end{aligned}\right.$$

Multipliant la première par $\frac{A_1}{\Delta^2}$, la seconde par $\frac{A_1'}{\Delta^2}$ et la troisième par $\frac{A_1''}{\Delta^2}$, on trouvera en ajoutant, membre à membre,

$$(k)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=\frac{A}{\alpha}+\frac{A'}{\alpha'}+\frac{A''}{\alpha''}.$$

Cette équation représente *le lieu des sommets des angles trièdres circonscrits à la surface* (h) *et dont les faces sont parallèles aux plans conjugués de la surface* (e). Ce lieu est donc une surface homothétique de même centre que la surface (e). Autrement dit, elle lui est concentrique, semblable et semblablement placée (*).

(*) La recherche de ce lieu a été proposée, il y a trois ou quatre ans, au Concours général des lycées de Paris.

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE MONGE;

PAR M. GUSTAVE DUBOIS,
Professeur de Mathématiques.

THÉORÈME. — *Le lieu des sommets des angles trièdres circonscrits à un paraboloïde du second ordre* S, *et dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'une surface à centre du second ordre* S′, *est un plan parallèle au plan diamétral de* S′ *conjugué des cordes parallèles à l'axe du paraboloïde* S.

Soit

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} + x = 0$$

l'équation du paraboloïde S.

On n'ôtera rien à la généralité de la question en supposant que la surface S′ a son centre à l'origine, et que par conséquent son équation est

$$(1)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 1.$$

Cela posé, soient

$$p = lx + l'y + l''z = 0,$$
$$q = mx + m'y + m''z = 0,$$
$$r = nx + n'y + n''z = 0,$$

les équations de trois plans diamétraux conjugués de la surface S′; on pourra mettre l'équation de cette surface sous la forme

$$Kp^2 + K'q^2 + K''r^2 = 1.$$

En identifiant avec l'équation (1), on trouve les équa-

tions de condition :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &Kl^2 + K'm^2 + K''n^2 = A,\\ &Kl'^2 + K'm'^2 + K''n'^2 = A',\\ &Kl''^2 + K'm''^2 + K''n''^2 = A'',\\ &Kl'l'' + K'm'm'' + K''n'n'' = B,\\ &Kll'' + K'mm'' + K''nn'' = B',\\ &Kll' + K'mm' + K''nn' = B''. \end{aligned}\right.$$

Maintenant, les équations des plans tangents à S et parallèles à $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, sont :

$$lx + l'y + l''z = \frac{pl'^2 + ql''^2}{2l},$$

$$mx + m'y + m''z = \frac{pm'^2 + qm''^2}{2m},$$

$$nx + n'y + n''z = \frac{pn'^2 + qn''^2}{2n},$$

ce qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2l^2x + 2ll'y + 2ll''z &= pl'^2 + ql''^2,\\ 2m^2x + 2mm'y + 2mm''z &= pm'^2 + qm''^2,\\ 2n^2x + 2nn'y + 2nn''z &= pn'^2 + qn''^2. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute, après avoir multiplié respectivement par K, K′, K″, on trouve, en tenant compte des conditions (2),

$$(3)\qquad 2Ax + 2B''y + 2B'z = pA' + qA'' :$$

c'est l'équation d'un plan parallèle au plan diamétral de S′ conjugué des cordes parallèles à la droite

$$\left\{\begin{aligned} y &= 0,\\ z &= 0, \end{aligned}\right.$$

qui n'est autre que l'axe du paraboloïde S.

Corollaire. — Le lieu des sommets des angles trièdres

trirectangles circonscrits à un paraboloïde est un plan perpendiculaire à l'axe de ce paraboloïde.

Car, si la surface S' devient une sphère, l'équation du plan (3) se réduit à

$$x = \frac{p+q}{2}.$$

Dans le cas du paraboloïde de révolution, on trouve

$$x = p;$$

dans le cas du paraboloïde hyperbolique équilatère, on trouve

$$x = 0.$$

Scolie. — Pour que le plan (3) soit perpendiculaire à l'axe du paraboloïde, il suffit que la surface S' ait l'un de ses axes parallèle à l'axe du paraboloïde.

PLAN OSCULATEUR A L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES HOMOFOCALES;

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

On trouve, au tome XVII des *Nouvelles Annales*, p. 242 et 243, différentes propositions énoncées par M. Heilermann sur les surfaces du second degré. M. Valson, dans la thèse qu'il avait soutenue en 1854, les avait de son côté obtenues et même démontrées, excepté la première que voici :

Par un point quelconque d'un ellipsoïde passent deux lignes de courbure et deux plans osculateurs à ces lignes; ces plans coupent le grand axe en deux points P et Q: prenons sur ce même axe deux points F et F' à égale

distance du centre O, tels, que les quatre points F, P, Q, F′ forment une relation *harmonique*; les points F et F′ sont *fixes*, quel que soit le point de l'ellipsoïde.

Ce théorème nous semble inexact.

Cependant M. Dewulf a cherché à le démontrer (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 46); mais sa démonstration est fondée sur le théorème suivant, qu'il se contente d'énoncer et qui nous paraît également douteux :

Le plan osculateur à l'intersection d'un ellipsoïde par un hyperboloïde homofocal est tangent à cet hyperboloïde.

S'il en était ainsi, il semble que ce plan devrait être aussi tangent à l'ellipsoïde, puisque l'intersection est à la fois une ligne de courbure des deux surfaces : ainsi, le long de cette ligne, ces surfaces auraient des plans tangents communs, ce qui est impossible, puisqu'elles se coupent à angle droit.

Quoi qu'il en soit, nous allons faire, par une méthode différente, les calculs qui seraient nécessaires pour vérifier, si cela était possible, le théorème de M. Heilermann : nous conserverons les notations de M. Dewulf.

I. Indiquons par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2-u^2}+\frac{y^2}{b^2-u^2}+\frac{z^2}{c^2-u^2}=1$$

les équations d'un ellipsoïde et d'un hyperboloïde homofocaux passant par un même point dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1; elles donneront, en les appliquant à ce point :

$$\begin{aligned} u^4 - u^2(a^2+b^2+c^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2)+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 \\ -x_1^2(b^2+c^2)-y_1^2(a^2+c^2)-z_1^2(a^2+b^2)=0. \end{aligned}$$

Soient u_0^2, u_1^2 les racines de cette équation, nous suppo-

serons que u^2 est remplacé par l'une d'elles dans l'équation de l'hyperboloïde.

Il faut donc calculer la distance à laquelle l'axe Ox (nous n'avons pas besoin de supposer que ce soit le grand axe) est coupé par le plan osculateur correspondant à $u^2 = u_0^2$: nous allons d'abord faire ce calcul, non pas seulement pour le point donné, mais pour un point quelconque de la ligne de courbure, représenté par x, y, z.

On sait que l'équation du plan osculateur en ce point est

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)(\xi - x) + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)(\eta - y)$$
$$+ (dx\,d^2y - dy\,d^2x)(\zeta - z) = 0;$$

mais prenons x pour variable indépendante, et posons $\eta = 0$, $\zeta = 0$, puisqu'il ne s'agit que de l'intersection du plan avec Ox; il reste

$$\xi - x = \frac{zy'' - yz''}{y'z'' - z'y''}.$$

II. Éliminons x^2 entre les équations des surfaces, il vient

$$\frac{y^2(b^2 - a^2)}{b^2(b^2 - u^2)} + \frac{z^2(c^2 - a^2)}{c^2(c^2 - u^2)} = 1,$$

ou bien

$$z^2 = \lambda y^2 + \gamma,$$

en posant

$$\lambda = -\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}\cdot\frac{c^2 - u^2}{b^2 - u^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{c^2(c^2 - u^2)}{c^2 - a^2}.$$

En différentiant deux fois cette équation, on a

$$zz' = \lambda yy', \qquad z'^2 + zz'' = \lambda(y'^2 + yy'').$$

Mais l'équation de l'ellipsoïde donne aussi

$$\frac{zz'}{c^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{x}{a^2} = 0, \quad \frac{z'^2 + zz''}{c^2} + \frac{y'^2 + yy''}{b^2} + \frac{1}{a^2} = 0;$$

par conséquent,

$$yy'\left(\frac{\lambda}{c^2}+\frac{1}{b^2}\right)=-\frac{x}{a^2};$$

et si nous posons

$$b^2\lambda+c^2=\frac{1}{\rho},$$

il reste

$$y'=-\frac{b^2c^2\rho x}{a^2y},$$

ainsi que

$$z'=-\frac{\lambda b^2c^2\rho x}{a^2z};$$

on aura de même

$$\frac{y'^2+yy''}{b^2c^2\rho}=-\frac{1}{a^2}\quad\text{et}\quad\frac{z'^2+zz''}{b^2c^2\rho}=-\frac{\lambda}{a^2}.$$

De là on tire

$$y''=-\frac{b^2c^2\rho\,(a^2y^2+b^2c^2\rho x^2)}{a^4y^3},$$

$$z''=-\frac{\lambda b^2c^2\rho\,(a^2z^2+\lambda b^2c^2\rho x^2)}{a^4z^3}.$$

Substituant toutes ces expressions dans la valeur de $\xi-x$, supprimant le facteur $-\frac{b^2c^2\rho}{a^4}$, commun à y'' et à z'', et ayant égard à ce que y' et z' ont aussi le signe $-$, on trouve

$$\xi-x=\frac{\frac{z}{y^3}(a^2y^2+b^2c^2\rho x^2)-\frac{\lambda y}{z^3}(a^2z^2+\lambda b^2c^2\rho x^2)}{\frac{b^2c^2\rho x}{a^2}\left[\frac{\lambda(a^2y^2+b^2c^2\rho x^2)}{zy^3}-\frac{\lambda(a^2z^2+\lambda b^2c^2\rho x^2)}{yz^3}\right]}$$

$$=\frac{a^2[z^4(a^2y^2+b^2c^2\rho x^2)-\lambda y^4(a^2z^2+\lambda b^2c^2\rho x^2)]}{\lambda b^2c^2\rho x[z^2(a^2y^2+b^2c^2\rho x^2)-y^2(a^2z^2+\lambda b^2c^2\rho x^2)]};$$

simplifiant dans le dénominateur, on a encore :

$$\xi - x = \frac{a^2[\rho b^2c^2x^2(z^4 - \lambda^2y^4) + a^2z^2y^2(z^2 - \lambda y^2)]}{\lambda b^4c^4\rho^2x^3(z^2 - \lambda y^2)}.$$

Enfin, supprimant un facteur commun, on a

$$\xi - x = \frac{a^2[\rho b^2c^2x^2(z^2 + \lambda y^2) + a^2z^2y^2]}{\lambda b^4c^4\rho x^3}.$$

III. Il faut maintenant, dans cette expression, remplacer y et z en fonction de x. Les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{et} \quad z^2 = \lambda y^2 + \gamma$$

donnent

$$a^2y^2 = b^2\rho(a^2c^2 - c^2x^2 - a^2\gamma),$$

et il reste

$$\frac{(\xi - x)\lambda b^4c^4\rho^2x^3}{a^2} = \rho b^2c^2x^2(z^2 + \lambda y^2) + z^2b^2\rho(a^2c^2 - c^2x^2 - a^2\gamma),$$

ou bien, en réduisant et supprimant le facteur commun $b^2\rho$,

$$\frac{(\xi - x)\lambda b^2c^4\rho x^3}{a^2} = \frac{c^2x^2\lambda b^2\rho(a^2c^2 - c^2x^2 - a^2\gamma)}{a^2} + z^2(a^2c^2 - a^2\gamma);$$

supprimant un terme commun de part et d'autre, on a :

$$\frac{\xi\lambda b^2c^4\rho x^3}{a^2} = c^4x^2\lambda b^2\rho(c^2 - \gamma) + (c^2 - \gamma)[a^2\gamma + \lambda b^2\rho(a^2c^2 - c^2x^2 - a^2\gamma)].$$

Une nouvelle simplification donne encore

$$\frac{\xi\lambda b^2c^4\rho x^3}{a^4} = \gamma(c^2 - \gamma) + (c^2 - \gamma)^2\lambda b^2\rho.$$

IV. Parmi les quantités auxiliaires, nous nous proposons actuellement de ne plus garder que ρ. Pour cela, nous commencerons par résoudre, relativement à u^2,

l'équation

$$\lambda = \frac{c^2(a^2-b^2)(u^2-c^2)}{b^2(c^2-a^2)(u^2-b^2)},$$

d'où l'on tire

$$u^2 = \frac{\lambda b^4(c^2-a^2) - c^4(a^2-b^2)}{\lambda b^2(c^2-a^2) - c^2(a^2-b^2)};$$

donc

$$c^2 - u^2 = \frac{\lambda b^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{\lambda b^2(c^2-a^2) - c^2(a^2-b^2)},$$

et

$$\gamma = \frac{c^2(c^2-u^2)}{c^2-a^2} = \frac{\lambda b^2 c^2(c^2-b^2)}{\lambda b^2(c^2-a^2) - c^2(a^2-b^2)}.$$

Remplaçant d'abord γ par cette valeur dans la dernière fonction de ξ, nous aurons, en supprimant λ comme facteur commun,

$$\frac{\xi b^2 c^4 \rho x^2}{a^4} = \frac{b^2 c^2(c^2-b^2)(c^2-\gamma)}{\lambda b^2(c^2-a^2) + c^2(b^2-a^2)} + b^2\rho(c^2-\gamma)^2.$$

Mais aussi

$$\lambda b^2 = \frac{1-\rho c^2}{\rho};$$

substituant cette valeur, réduisant et supprimant $b^2\rho$ comme facteur commun, on aura

$$\frac{\xi c^4 x^2}{a^4} = \frac{c^2(c^2-b^2)(c^2-\gamma)}{c^2\rho(b^2-c^2) + c^2 - a^2} + (c^2-\gamma)^2.$$

V. Afin d'achever cette transformation, il faut aussi poser

$$\lambda b^2 = \frac{1-c^2\rho}{\rho}$$

dans la valeur de γ pour obtenir $c^2-\gamma$; on a

$$\gamma = \frac{c^2(c^2-b^2)(1-\rho c^2)}{(c^2-a^2)(1-\rho c^2) - \rho c^2(a^2-b^2)} = \frac{c^2(c^2-b^2) - c^4\rho(c^2-b^2)}{c^2 - a^2 + c^2\rho(b^2-c^2)},$$

et

$$c^2 - \gamma = \frac{c^2(b^2 - a^2)}{c^2\rho(b^2 - c^2) + c^2 - a^2}.$$

Donc enfin,

$$\frac{\xi c^4 x^3}{a^4} = \frac{c^2(b^2 - a^2)[c^2(c^2 - b^2) + c^2(b^2 - a^2)]}{[c^2\rho(b^2 - c^2) + c^2 - a^2]^2}$$
$$= \frac{c^4(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{[c^2\rho(b^2 - c^2) + c^2 - a^2]^2},$$

et

$$\frac{\xi x^3}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{[c^2\rho(b^2 - c^2) + c^2 - a^2]^2}.$$

VI. On trouve ainsi la valeur de ξ en fonction de l'abscisse x d'un point quelconque de la ligne de courbure qui correspond à l'un des hyperboloïdes. Mais si ce point se confond avec le point fixe représenté par x_1, y_1, z_1, il faut considérer les deux lignes de courbure et les deux valeurs de ξ qui sont alors $OP = \alpha$, $OQ = \beta$, l'une relative à u_0^2, l'autre à u_1^2, chaque valeur de u^2 correspondant à une valeur de ρ.

M. Dewulf observe que le théorème de M. Heilermann exige que le produit $\alpha\beta$ soit constant : nous reconnaîtrons bientôt que cette constance n'existe pas, mais il sera facile de voir qu'elle serait en effet nécessaire pour la vérité du théorème.

Imaginons, dans l'ordre suivant, les points F′, P, F, Q et le point O à égale distance de F et de F′ ; posons

$$OF = OF' = \delta.$$

Si les quatre premiers points sont en division harmonique, on a

$$PF.F'Q = PF'.FQ,$$

ce qui revient à

$$(\delta - \alpha)(\delta + \beta) = (\delta + \alpha)(\beta - \delta);$$

par conséquent $\delta^2 = \alpha\beta$, et comme il s'agit de vérifier si δ est constant, il faut calculer $\alpha\beta$.

Relativement à l'une des lignes de courbure, la dernière fonction de ξ donne pour le point fixe :

$$\frac{\alpha x_1^3}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{[c^2\rho_0(b^2 - c^2) + c^2 - a^2]^2};$$

l'autre ligne donne pour le même point

$$\frac{\beta x_1^3}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{[c^2\rho_1(b^2 - c^2) + c^2 - a^2]^2}.$$

Multipliant ces valeurs, on obtient

$$\frac{\delta x_1^3}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{c^4\rho_0\rho_1(b^2 - c^2)^2 + c^2(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(\rho_0 + \rho_1) + (c^2 - a^2)^2}.$$

Il faut donc, pour calculer $\rho_0\rho_1$ et $\rho_0 + \rho_1$, obtenir l'équation en ρ ; pour cela, on pourrait exprimer u^2 en fonction de ρ et transporter cette expression dans l'équation en u^2 ; mais cette méthode serait pénible.

VII. Éliminant x entre les équations différentielles des deux surfaces, on a

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2(b^2 - u^2)} + \frac{\lambda(c^2 - a^2)}{c^2(c^2 - u^2)} = 0.$$

Mais

$$\gamma = \frac{c^2(c^2 - u^2)}{c^2 - a^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{b^2 - a^2}{b^2(b^2 - u^2)} + \frac{\lambda}{\gamma} = 0,$$

et l'on en tire aussi

$$b^2 - u^2 = \frac{c^2(b^2 - c^2) + \gamma(c^2 - a^2)}{c^2}.$$

On a donc

$$\frac{c^2(b^2 - a^2)}{b^2[c^2(b^2 - c^2) + \gamma(c^2 - a^2)]} + \frac{\lambda}{\gamma} = 0,$$

et comme

$$\gamma = z^2 - \lambda y^2,$$

il reste

$$\lambda^2 b^2 y^2 (c^2 - a^2) + \lambda\left[c^2 y^2 (b^2 - a^2) - b^2 c^2 (b^2 - c^2) - b^2 z^2 (c^2 - a^2)\right]$$
$$- c^2 z^2 (b^2 - a^2) = 0.$$

Posons

$$A = \frac{b^2(c^2 - a^2)}{c^2(b^2 - a^2)}, \quad B = \frac{b^2(b^2 - c^2)}{b^2 - a^2},$$

cette équation devient

$$\lambda^2 A y^2 + \lambda(y^2 - A z^2 - B) - z^2 = 0.$$

Remplaçons λ par $\frac{1 - c^2\rho}{b^2\rho}$, nous aurons l'équation en ρ :

$$A y^2 (c^2\rho - 1)^2 + b^2\rho(c^2\rho - 1)(A z^2 + B - y^2) - b^4\rho^2 z^2 = 0.$$

Le coefficient de ρ^2 est

$$(A c^2 - b^2)(c^2 y^2 + b^2 z^2) + B b^2 c^2.$$

Mais l'équation de l'ellipsoïde donne

$$\frac{c^2 y^2 + b^2 z^2}{b^2 c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

et de plus

$$A c^2 - b^2 = \frac{b^2(c^2 - b^2)}{b^2 - a^2} = -B;$$

donc ce coefficient revient à $\frac{B b^2 c^2 x^2}{a^2}$.

Le coefficient de ρ sera

$$-2 A c^2 y^2 - b^2(A z^2 + B - y^2).$$

Pour éliminer d'abord z^2, nous écrirons ce coefficient sous la forme

$$-A(2 c^2 y^2 + b^2 z^2) + b^2 y^2 - b^2 B,$$

ce qui, d'après ce qu'on vient de voir, revient à

$$-\frac{A b^2 c^2 (a^2 - x^2)}{a^2} - A c^2 y^2 + b^2 y^2 - b^2 B.$$

Comme

$$b^2 - A c^2 = B,$$

il reste

$$B(y^2 - b^2) - \frac{A b^2 c^2 (a^2 - x^2)}{a^2},$$

ou enfin

$$B y^2 + \frac{A b^2 c^2 x^2}{a^2} - b^4.$$

Enfin le terme indépendant sera $A y^2$. Si donc nous posons, pour abréger,

$$\frac{b^2 c^2 x^2}{a^2} = t^2,$$

l'équation en ρ devient

$$B t^2 \rho^2 - \rho(B y^2 + A t^2 - b^4) + A y^2 = 0,$$

d'où

$$\rho_0 + \rho_1 = \frac{b^4 - B y^2 - A t^2}{B t^2}, \quad \rho_0 \rho_1 = \frac{A y^2}{B t^2}.$$

VIII. Avant de substituer ces valeurs dans l'expression de δ, observons que celle qui donne α peut se mettre sous la forme

$$\frac{\alpha x_1^3}{a^4} = \frac{1}{\left(\rho_0 + \frac{A}{B}\right)^2} \cdot \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{c^4 (b^2 - c^2)^2},$$

ou bien

$$\frac{\alpha x_1^3 c^4}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 - c^2)^2 \left(\rho_0 + \frac{A}{B}\right)^2}.$$

De même

$$\frac{\beta x_1^3 c^4}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 - c^2)^2 \left(\rho_1 + \frac{A}{B}\right)^2},$$

et par conséquent

$$\frac{\delta x_1^3 c^4}{a^4} = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 - c^2)^2 \left[\rho_0\rho_1 + \frac{A}{B}(\rho_0 + \rho_1) + \left(\frac{A}{B}\right)^2\right]}.$$

Or, nous aurons

$$\rho_0\rho_1 + \frac{A}{B}(\rho_0 + \rho_1) + \left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{A}{B}\left(\frac{y_1^2}{t^2} + \frac{b^4 - B y_1^2 - A t^2}{B t^2} + \frac{A}{B}\right)$$

$$= \frac{A b^4}{B^2 t^2} = \frac{A a^2 b^2}{B^2 c^2 x_1^2},$$

car il s'agit ici du point donné sur l'ellipsoïde.

Ainsi

$$\frac{\delta x_1 c^2}{a^2} = \frac{B^2}{b^2 A} \cdot \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 - c^2)^2};$$

mais

$$\frac{B^2}{b^2 A} = \frac{c^2(b^2 - c^2)^2}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)},$$

d'où enfin

$$\delta = \frac{a^2}{x_1}.$$

Les intersections des mêmes plans osculateurs avec les autres axes donneraient de même les quantités

$$\delta' = \frac{b^2}{y_1}, \quad \delta'' = \frac{c^2}{z_1}.$$

On voit que ces résultats sont très-simples, mais qu'ils dépendent de la position du point pris sur la surface. Ils sont donc en contradiction avec les énoncés de M. Heilermann et de M. Dewulf.

NOTE SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT.

Si les résultats du calcul de M. Housel sont en contradiction avec les théorèmes énoncés (t. XVII, p. 242), cela tient à ce que, dans les énoncés de ces théorèmes, on a confondu les plans osculateurs aux deux lignes de courbure passant par un point de l'ellipsoïde avec les plans des deux sections normales principales, en ce point; la démonstration elle-même de M. Dewulf (t. XVIII, p. 46) le prouve, car les plans tangents aux deux hyperboloïdes considérés dans cette démonstration sont précisément les plans de deux sections normales principales de l'ellipsoïde. C'est ce qui résulte assez clairement de la proposition suivante :

Deux surfaces du second degré homofocales et d'espèces différentes se coupent partout à angle droit, et leur intersection est une ligne de courbure pour chacune d'elles (*).

Ainsi, les deux hyperboloïdes homofocaux à l'ellipsoïde et passant par un point M de sa surface coupent l'ellipsoïde suivant deux lignes de courbure; les tangentes MA, MB à ces deux lignes sont rectangulaires, et déterminent le plan tangent à l'ellipsoïde, en M; la normale MC à la surface appartient à la fois aux deux plans qui touchent les deux hyperboloïdes au point M; en outre, ces deux plans passent, l'un par MA et l'autre

(*) Peut-être n'est-il pas inutile de rappeler que cette importante proposition est due à M. Ch. Dupin. On en trouve la démonstration dans l'ouvrage publié en 1813 sous ce titre : *Développements de Géométrie*. Le même ouvrage fait connaître le moyen de décrire par un mouvement continu les lignes de courbure des surfaces du second degré.

par MB : ils coïncident, par conséquent, avec les plans des deux sections normales principales de l'ellipsoïde, au point M de sa surface.

D'où il faut conclure que la proposition démontrée par M. Dewulf est celle-ci :

Les plans de deux sections normales principales en un point quelconque de l'ellipsoïde coupent le grand axe de la surface en des points tels, que le produit de leurs distances au centre est invariable.

La valeur de ce produit est $\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2}$, en nommant $2a$, $2b$, $2c$ les trois axes, et supposant $a > b > c$.

Si l'on prend sur le grand axe, de chaque côté du centre, des longueurs égales à $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}{a}$, on aura deux points F, F', qu'on a nommés *points focaux*.

L'énoncé du second théorème (t. XVII, p. 242) donne lieu à la même rectification. Conformément à la démonstration de M. Dewulf (t. XVIII, p. 48), il faut dire :

Si, par les points focaux F, F' *et par une normale en un point quelconque* M *de l'ellipsoïde, on fait passer deux plans, les angles qu'ils forment entre eux sont divisés en parties égales par les plans des sections normales principales, en ce point.*

Il s'ensuit que les deux plans normaux menés par un point quelconque M de l'ellipsoïde et par les points F, F', coupent la surface suivant deux ellipses qui ont au point M des rayons de courbure égaux.

A l'égard des autres théorèmes mentionnés (t. XVII, p. 242), il n'y a aucun motif pour modifier leurs énoncés, ni pour douter de leur exactitude. Plusieurs d'entre eux se vérifient sans la moindre difficulté. Par exemple :

Les normales à l'ellipsoïde menées par les ombilics coupent le grand axe aux deux points focaux. Il est

facile de s'en assurer, puisque l'on connaît les coordonnées des ombilics et des points focaux.

Deux sphères qui ont pour rayons ces normales, et pour centres les points focaux, sont égales, et touchent l'ellipsoïde aux ombilics. C'est là une conséquence de la proposition précédente.

Ces deux sphères ont été nommées *sphères focales.*

Pour tous les points d'une ligne de courbure de l'ellipsoïde, et selon que cette ligne appartient à l'un ou l'autre des deux systèmes, la somme ou la différence des tangentes menées aux deux sphères focales est constante.

Cette proposition a été démontrée par M. Valson, et la démonstration qu'il en a donnée, au moyen des coordonnées elliptiques, n'est pas moins remarquable que le théorème qu'elle a pour objet. G.

COMPOSITIONS POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (ANNÉE 1863).

Composition mathématique.

On donne sur un plan deux circonférences O et O'; d'un point A de O, on mène des tangentes à O'; on joint les points de contact de ces tangentes, cette droite coupe la tangente menée en A à la circonférence O en un point M : on demande l'équation du lieu décrit par M, lorsque A parcourt la circonférence O.

Examiner les différentes formes de ce lieu selon la grandeur et la position relatives des circonférences O et O';

Indiquer les cas où il se décompose;

Faire voir que le lieu des points M est tangent à la

circonférence O en chacun des points d'intersection de cette courbe et de la circonférence O′.

Calcul trigonométrique.

Un triangle ABC a pour côtés

$$a = 446^{m},832,$$
$$c = 897^{m},355,$$

et l'angle compris entre ces côtés est

$$B = 75^{\circ}24'58'' :$$

calculer les angles A et C et les distances du centre du cercle inscrit à ABC aux trois sommets de ce triangle.

Composition de Géométrie descriptive.

On donne un ellipsoïde de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan vertical de projection. On coupe cette surface par un plan, et l'on prend la courbe résultant de cette intersection pour directrice d'un cône ayant pour sommet le point le plus élevé de l'ellipsoïde au-dessus du plan horizontal. Trouver la trace de ce cône sur le plan horizontal MN passant par l'axe de révolution de l'ellipsoïde.

Données.

Le centre de l'ellipsoïde est à 90 millimètres des deux plans de projection. Le demi-grand axe de l'ellipse méridienne est parallèle au plan vertical et a 70 millimètres de longueur; le demi-petit axe a 50 millimètres. Le plan sécant passe par le point (C, O′) et a pour trace horizontale AB ($AE = 70^{mm}$ et $BC = 105^{mm}$).

Les contours apparents de l'ellipsoïde seront en trait plein. Le plan sera considéré comme plan auxiliaire. La courbe directrice du cône sera tracée en tenant compte

des parties vues et des parties cachées. La trace du cône sur le plan MN sera figurée en trait plein.

Composition française.

Un jeune militaire est blessé dans un engagement. On le transporte à l'ambulance. Le chirurgien panse sa blessure, qui ne présente aucun danger. C'est le blessé lui-même qui raconte avec une sorte de joie naïve cet accident de sa vie militaire.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 644;

PAR M. HAAG,
Élève de Mathématiques spéciales du lycée Saint-Louis
(classe de M. Briot).

ÉNONCÉ. — *On sait que le cercle osculateur en un point quelconque* A *d'une parabole coupe cette courbe en un second point* B; démontrer :

1° *Que la droite* AB *et toutes les droites analogues sont tangentes à une même parabole;*

2° *Que le lieu géométrique des milieux des cordes telles que* AB *est une parabole.*

Lemme. — Si un cercle coupe une section conique en quatre points A, B, C, D, les bissectrices des angles que font entre eux deux côtés opposés du quadrilatère de ces quatre points sont parallèles aux axes de la courbe. (La démonstration de ce théorème se trouve dans les *Annales de Mathématiques de Gergonne.*)

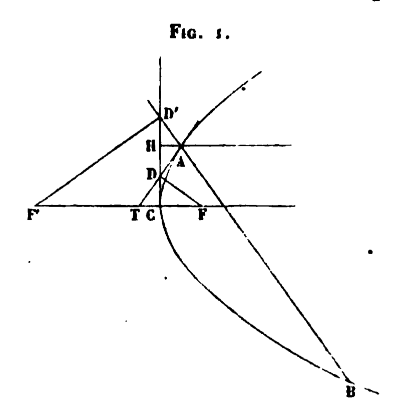
Corollaire. — Supposons que les deux points C et D se rapprochent du point A jusqu'à coïncider avec lui : le cercle sera osculateur à la conique, l'angle des côtés AB, CD deviendra l'angle de AB avec la tangente AT, et, d'après

le théorème précédent, les bissectrices de cet angle devront être parallèles aux axes de la conique.

Démonstration des deux théorèmes énoncés.

1° Menons la tangente au sommet C de la parabole (*fig.* 1), et désignons par D, H et D′ les points où elle

Fig. 1.

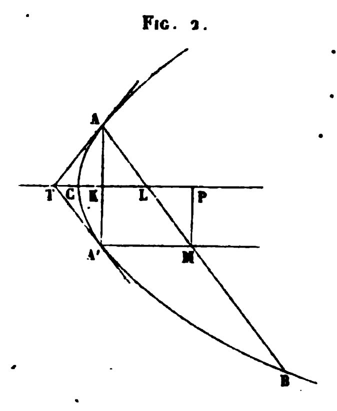


rencontre la tangente AT, le diamètre AH du point A, et la corde AB. En D′ élevons une perpendiculaire à AB, et soit F′ son point d'intersection avec l'axe. Joignons encore FD et remarquons que cette droite est perpendiculaire à AT. AH étant une bissectrice de l'angle DAD′ (d'après le lemme), l'égalité des angles DAH, D′AH en résulte; mais ces angles sont respectivement égaux aux angles CDF, CD′F′, car ils ont deux à deux leurs côtés perpendiculaires et dirigés dans le même sens. Donc les angles CDF, CD′F′ sont aussi égaux, et les triangles rectangles DCF, D′CF′ sont semblables. Mais CD = DH d'après une propriété de la parabole, et DH = D′H, parce que le triangle DAD′ est isocèle; donc CD′ = 3CD, et comme les triangles DCF, D′CF′ sont semblables, CF′ sera aussi égal à 3CF. Le point F′ est donc un point fixe, et l'on

voit alors que toutes les droites telles que AB sont tangentes à une même parabole dont F′ est le foyer et C le sommet. Le paramètre de cette parabole est triple de celui de la parabole donnée.

2° Par le point T (*fig.* 2), où la tangente en A ren-

Fig. 2.



contre l'axe, menons la seconde tangente TA′ à la parabole. A et A′ sont deux points symétriques par rapport à l'axe, et, d'après le lemme, TA′ est une parallèle à AB. Le milieu M de la corde AB se trouvera donc au point d'intersection de cette corde avec le diamètre du point A′. Appelons K et L les points où AA′ et AB rencontrent l'axe. La perpendiculaire MP, abaissée du point M sur l'axe, est égale à A′K et par suite à AK : on en conclut que les longueurs KL, LP sont aussi égales, et comme, dans le triangle isocèle TAL, KL = TK = 2CK, il en résulte que CP = 5CK. Alors

$$\frac{\overline{MP}^2}{CP} = \frac{\overline{AK}^2}{5CK} = \text{constante.}$$

Le lieu du point M est une parabole ayant encore même axe et même sommet que la parabole donnée, mais dont le paramètre est cinq fois moindre.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 644;

PAR M. L. P.,
Soldat au 30e de ligne.

L'équation générale des courbes du second degré, tangentes en un point A à une parabole donnée $y^2 - 2px = 0$, est

$$y^2 - 2px + \lambda \left(y - mx - \frac{p}{2m}\right)(y - m'x - n') = 0$$

La courbe devant être un cercle, le coefficient du terme en xy doit être nul, ce qui donne $m' = -m$.

Pour que ce cercle soit osculateur à la parabole au point A, il suffit qu'un des deux points d'intersection de la droite $y - m'x - n' = 0$ et de la parabole coïncide avec le point A dont les coordonnées sont

$$x_1 = \frac{p}{2m^2}, \quad y_1 = \frac{p}{m};$$

ce qui donne

$$n' = \frac{3p}{2m} = -\frac{3p}{2m'}.$$

L'équation de AB est donc

$$y = m'x + \frac{(-3p)}{2m'}.$$

1° On voit que cette droite est tangente à la parabole $y^2 = -6px$, de même que la droite $y = mx + \frac{p}{2m}$ est tangente à la parabole donnée $y^2 = 2px$.

2° Le milieu de AB est à l'intersection de cette droite dont l'équation est

$$(1) \qquad y = m'x - \frac{3p}{2m'}$$

et du diamètre de la parabole conjugué des cordes parallèles à la direction m'. Ce diamètre est représenté par

$$(2) \qquad m'y - p = 0.$$

En éliminant m' entre les équations (1) et (2), on obtient

$$y^2 = \frac{2p}{5} \cdot x.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Dupain, professeur; Laisant, lieutenant du génie; M., lieutenant d'artillerie; John Ritter; Gustave Harang, élève du lycée de Douai (classe de M. Painvin); Cornille, élève du lycée de Strasbourg; Marcellin Noblot, élève du lycée de Lyon; Geoffroy et Lhuillier, élèves du lycée de Nancy; Belhomme et Jarlot, élèves du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet); H. Cordier, élève du collége Rollin (classe de M. Suchet); A. Trasce, élève du lycée Charlemagne.

QUESTION 640

(voir p. 93);

SOLUTION DE M. L. C.,
Étudiant.

Tout se réduit à faire voir que le troisième triangle est semblable au premier ABC.

Soit G le point d'intersection des médianes AD, BE, CF de ABC. En prenant, sur les prolongements de AD, BE, CF, des longueurs DH, EI, FK égales à DG, BG, FG, et tirant les droites CH, AI, BK, on forme des triangles CGH, AGI, BGK, dont les côtés sont égaux aux deux tiers de AD, BE, CF, et dans lesquels CD, AE, BF sont

des médianes. Ainsi, dans le triangle CGH, les médianes sont respectivement égales aux moitiés des côtés du triangle ABC. Et par conséquent, les médianes d'un triangle dont les côtés sont égaux à AD, BE, CF ont pour valeurs les trois quarts des côtés de ABC. Ce qui démontre le principe énoncé.

Note. — La même question a été résolue par MM. J.-Ch. Dupain, professeur; Rivet, lieutenant d'artillerie; Laisant, lieutenant du génie; J. de Virieu, professeur à Lyon (Institution Sainte-Barbe); Oppermann, élève du lycée de Strasbourg; Léon Lhuillier et Charles Geoffroy, élèves à Nancy; H. de Nicol, candidat à l'École navale à Metz; Henri Lacan, élève au lycée d'Agen; Bidot, élève du collége de Lons-le-Saulnier; Abraham Schnée, élève du lycée Charlemagne; P.-R., élève du collége Rollin.

QUESTION 635;

SOLUTION DE M. HERMILE DE LA PHIDELNE,
Élève du lycée Charlemagne.

ÉNONCÉ. — *On sait que si d'un point* M *pris sur le plan d'une conique* C, *ayant pour foyers* F, F′, *on mène à cette courbe deux tangentes* MT, MT′, *et les deux droites* MF, MF′, *les angles* TMF, T′MF′, *sont égaux; de sorte que si le point* M *est pris sur une autre conique* C′ *ayant les mêmes foyers* F, F′ *que* C, *la bissectrice de l'angle des tangentes, ou de son adjacent, est tangente à la courbe* C′ *au point* M. *Prouver que toute courbe* C″, *qui par rapport à la conique* C *jouit de la même propriété, est une conique ayant les mêmes foyers* F, F′.

Soient MS_1, MS, les bissectrices de l'angle FMF' et de son adjacent; l'une de ces deux droites est, par hypothèse, tangente à C'' au point M.

Nommons r, r_1 les rayons vecteurs MF, MF'; ν, ν_1 les angles que ces rayons vecteurs forment avec la tangente menée au point M à C''; et r'_{r_1} la dérivée de r par rapport à r_1 : on sait que

$$r'_{r_1} = \frac{\cos \nu}{\cos \nu_1}.$$

Ici, $\frac{\cos \nu}{\cos \nu_1} = \pm 1$. Donc $r'_{r_1} = \pm 1$. D'où $r \pm r_1 = \text{const.}$

Ce qui montre que la courbe C'' est une conique ayant les deux points F, F' pour foyers.

QUESTIONS.

668. *Si l'on désigne par a, b, c trois demi-diamètres d'une conique, par* A *et* B *ses demi-axes principaux, on a la relation :*

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \left[\frac{\sin 2(b, c)}{a^2} + \frac{\sin 2(c, a)}{b^2} + \frac{\sin 2(a, b)}{c^2}\right] \frac{1}{2 \sin(a, b) \sin(b, c) \sin(c, a)}.$$

(FAURE.)

669. Deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ étant donnés, désignons par α_1, α_2, α_3, α_4 les volumes des tétraèdres que l'on obtient en joignant le sommet a aux sommets a', b', c', d'; par β_1, β_2, β_3, β_4 les volumes des tétraèdres que l'on obtient en joignant le sommet b aux sommets

a', b', c', d', etc., on aura la relation

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} = abcd \times \overline{a'b'c'd'}^3.$$

(FAURE.)

670. Dans l'hyperbole équilatère, si l'on multiplie la distance d'un point de la directrice au centre par la tangente de l'angle sous lequel on voit de ce point l'hyperbole, on obtient pour produit l'axe transverse.

(FAURE.)

CORRESPONDANCE.

M. E. Fontaneau nous adresse une rectification relative à la solution qu'il a donnée (p. 300) de la question 317, proposée par M. de Jonquières.

Le second corollaire (p. 301) doit être énoncé de la manière suivante :

Si, par un point P *pris hors d'une conique* S, *on mène une série de cordes, et que, par les extrémités de chacune d'elles, et par deux points* a, n, *pris sur la courbe, et un troisième point* b *pris en dehors, on fasse passer une série de courbes du second ordre, toutes ces courbes se couperont en un même quatrième point.*

La démonstration que M. Fontaneau en donne se fonde sur les lemmes 1, 2 (p. 300, 301), qui dépendent eux-mêmes de la théorie des involutions. On peut démontrer ce corollaire en remarquant que les courbes du second ordre qui passent par a, n, b, et dont les secondes cordes d'intersection avec S sont assujetties à passer par

le point fixe P, forment un faisceau, ou, si l'on veut, une *série* du second ordre dont l'*indice* est 1. D'où il suit qu'elles se coupent en un quatrième point fixe m, qui constitue avec a, n, b, la *base* du faisceau.

Au moyen de ce second corollaire, ainsi rectifié, M. Fontaneau parvient à une solution de la question 317, qui, au fond, diffère peu de celle que M. Cremona a donnée (t. XX, p. 342), sous une forme très-simple.

G.

BIBLIOGRAPHIE.

Coup d'œil historique sur la projection des cartes de géographie, Notice lue à la Société de Géographie de Paris, dans sa séance publique du 19 décembre 1862, par *M. d'Avezac* (*Bulletin de la Société de Géographie*, t. V, 1863, p. 257 à 360 et 425 à 486).

Cette intéressante dissertation, accompagnée de notes d'une érudition immense, est destinée à détruire de nombreuses erreurs historiques. En remontant aux sources, M. d'Avezac a pu donner une date certaine à la première apparition de chaque système de projections et rendre à chaque inventeur ce qui lui appartient. Ainsi, d'après le savant géographe, la projection de Flamsteed (1700) appartient à Sanson (1650); la projection du Dépôt de la guerre est de Ptolémée (150); la projection de Lorgna (1789) doit être restituée à Lambert (1772); Wright n'a jamais revendiqué pour lui-même la projection de Mercator (1569): il en a seulement donné (1589) la théorie, que l'inventeur n'avait pas divulguée (*); la

(*) Loin de s'attribuer l'invention de Mercator, Wright allait jusqu'à prétendre que le système des latitudes croissantes était déjà suffisamment

projection d'Arrowsmith (1794) est de G. Postel (1581); enfin la projection nommée homalographique par M. Babinet (1857) est due au géomètre allemand Mollweide (1805).

Sur ce dernier point nous ne pouvons approuver les insinuations assez mal fondées auxquelles se livre l'auteur de la Notice, à l'égard d'un savant et spirituel académicien. M. d'Avezac n'ose pas dire que M. Babinet s'est approprié l'idée de Mollweide en supprimant le nom de l'inventeur, mais on voit qu'il le pense et il le donne à entendre. N'est-il pas plus naturel, plus vraisemblable d'admettre que M. Babinet n'a eu aucune connaissance du travail de Mollweide, enfoui dans une volumineuse collection, ignoré de presque tous les écrivains spéciaux, et que, s'étant proposé le même problème, il a dû tomber sur la même solution? De pareilles rencontres ne sont pas rares, et il n'y a guère de géomètre, petit ou grand, qui n'ait réinventé quelque chose sans s'en douter. C'est ce que les éditeurs de journaux mathématiques savent mieux que personne (*).

Il paraît moins facile de justifier M. Babinet au sujet de cette assertion : « que la projection homalographique est la seule qui n'altère pas l'étendue relative des diverses parties du globe. » On ne peut voir là qu'une forte distraction, puisque M. Babinet lui-même reconnaît que d'autres projections jouissent de la même propriété. (Voir *Atlas universel de Géographie physique et poli-*

---

indiqué par Ptolémée, assertion gratuite qu'on retrouve dans le *Dictionnaire mathématique de l'Encyclopédie méthodique*, art. *Projection*. (*Voir* JAMES WILSON, *A dissertation on the rise and progress of the modern art of navigation; Scriptores logarithmici*, t. IV, p. 301.)

(*) Rien, a dit avec raison M. Terquem, n'est plus rare en mathématiques qu'un plagiat effectif; rien au contraire de plus commun qu'un plagiat involontaire. Au reste, les méthodes générales constituent seules de véritables découvertes, quoiqu'elles ne fassent pas toujours autant de bruit qu'une application utile.

tique à l'usage des cours supérieurs, Introduction, p. 6 et 8.)

A part ce léger dissentiment, nous ne pouvons que louer l'excellente Notice de M. d'Avezac et souhaiter qu'elle se répande parmi tous ceux qui s'occupent de géographie ou de géodésie. Nous saisissons cette occasion pour appeler de nouveau l'attention de nos lecteurs sur les beaux Atlas publiés par l'éditeur Bourdin (*), dans le système homalographique, dont les avantages, aujourd'hui bien reconnus, sont indépendants de toute question de priorité. P.

SUR UNE LOCUTION NOUVELLE.

« Que dites-vous? Comment? Je n'y suis pas : vous plairait-il de recommencer? Vous voulez, Acis, me dire qu'il fait froid; que ne disiez-vous : Il fait froid ! »

Ce passage de la Bruyère m'est revenu en mémoire à l'occasion d'une locution nouvelle déjà fort répandue, et qui consiste à nommer *variété évanouissante* le cas particulier d'une conique qui se réduit à un point ou à deux droites. J'avoue que je n'ai pas compris tout d'abord. En bon français, une *variété évanouissante* devrait vouloir dire une variété qui s'évanouit, qui cesse d'exister, en sorte qu'une ellipse, qui cependant est un genre et non une variété, cesserait d'être une variété quand elle se réduirait à un point. Quel galimatias! Revenons à la Bruyère.

« Vous voulez dire, Acis, que votre courbe se réduit

(*) 51, rue de Seine. *Voir*, sur ces Atlas, les *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 150.

à un point ou à deux droites : dites qu'elle se réduit à un point ou à deux droites. Mais, répondez-vous, cela est bien uni et bien clair, et d'ailleurs qui ne pourrait en dire autant? Qu'importe, Acis? Est-ce un si grand mal d'être entendu quand on parle et de parler comme tout le monde? (La Bruyère, chap. V, *De la Société et de la Conversation.*) E. P.

THÉORÈMES SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

Par M. HIOUX,
Répétiteur au lycée Bonaparte,
Et M. BODEMER,
Professeur au lycée de Caen.

I. *Étant donnée une surface du second ordre* S, *si, d'un point fixe* P, *on mène trois droites parallèles à un système de diamètres conjugués d'une surface du second ordre à centre, qui rencontrent la surface* S *en trois points* A, B, C, *le lieu du pôle* M *du plan* ABC *par rapport à cette surface est une surface du second ordre* S'.

Prenons pour surface à centre un ellipsoïde E, et pour axes coordonnés les axes $2a$, $2b$, $2c$ de cette surface directrice.

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point P;

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f = {} & Ax^2 A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ & + 2Cx + 2C'y + 2C''z + 1 = 0 \end{aligned}\right.$$

l'équation de la surface S.

Le plan de pôle M $(\alpha, 6, \gamma)$ a pour équation

$$(2)\quad V = xf'\alpha + yf'6 + zf'\gamma + 2C\alpha + 2C'6 + 2C''\gamma + 2 = 0.$$

Concevons le cône qui a pour sommet le point P et

pour directrice la courbe définie par les équations (1) et (2). En exprimant que ce cône admet comme génératrices les trois droites PA, PB, PC parallèles à trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde E, nous aurons une relation entre les coordonnées α, 6, γ du point M, qui sera l'équation du lieu S'.

Pour obtenir l'équation du cône en question, transportons l'origine au point P. Les équations (1) et (2) deviennent

$$\begin{gathered}
A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' xz + 2 B'' xy \\
+ x f' x_1 + y f' y_1 + z f' z_1 + f_1 = 0, \\
x f' \alpha + y f' 6 + z f' \gamma + V_1 = 0.
\end{gathered}$$

Les équations d'une génératrice du cône sont de la forme

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} = \rho.$$

En combinant ces équations avec les précédentes, on obtient

$$\begin{gathered}
\rho^2 (A l^2 + A' m^2 + A'' n^2 + 2 B mn + 2 B' ln + 2 B'' lm) \\
+ \rho (l f' x_1 + m f' y_1 + n f' z_1) + f_1 = 0, \\
\rho (l f' \alpha + m f' 6 + n f' \gamma) + V_1 = 0,
\end{gathered}$$

d'où l'on déduit l'équation de condition

$$\begin{gathered}
V_1^2 (A l^2 + A' m^2 + A'' n^2 + 2 B mn + 2 B' ln + 2 B'' lm) \\
- V_1 (l f' x_1 + m f' y_1 + n f' z_1)(l f' \alpha + m f' 6 + n f' \gamma) \\
+ f_1 (l f' \alpha + m f' 6 + n f' \gamma)^2 = 0,
\end{gathered}$$

qui exprime que la génératrice rencontre la directrice.

L'élimination de l, m, n entre cette équation et celles de la génératrice donne pour l'équation du cône

$$(3) \left\{ \begin{aligned}
& V_1^2 (A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' xz + 2 B'' xy) \\
& - V_1 (x f' x_1 + y f' y_1 + z f' z_1)(x f' \alpha + y f' 6 + z f' \gamma) \\
& + f_1 (x f' \alpha + y f' 6 + z f' \gamma)^2 = 0.
\end{aligned} \right.$$

Remarquons que cette équation est de la forme

$$Mx^2 + M'y^2 + M''z^2 + 2Nyz + 2N'xz + 2N''xy = 0,$$

puisque l'origine est au sommet du cône.

Soient maintenant

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{l'} = \frac{z}{l''}, \quad \frac{x}{m} = \frac{y}{m'} = \frac{z}{m''}, \quad \frac{x}{n} = \frac{y}{n'} = \frac{z}{n''},$$

les équations des droites PA, PB, PC.

En exprimant qu'elles sont des génératrices du cône, nous aurons

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{l} Ml^2 + M'l'^2 + M''l''^2 + 2Nl'l'' + 2N'll'' + 2N''ll' = 0, \\ Mm^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ Mn^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{array}\right.$$

D'un autre côté, les trois plans diamétraux de l'ellipsoïde E

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

conjugués des directions PA, PB, PC, ont pour équations

$$\frac{lx}{a^2} + \frac{l'y}{b^2} + \frac{l''z}{c^2} = 0,$$

$$\frac{mx}{a^2} + \frac{m'y}{b^2} + \frac{m''z}{c^2} = 0,$$

$$\frac{nx}{a^2} + \frac{n'y}{b^2} + \frac{n''z}{c^2} = 0;$$

l'équation de l'ellipsoïde peut, par suite, se mettre sous la forme

$$K^2\left(\frac{lx}{a^2} + \frac{l'y}{b^2} + \frac{l''z}{c^2}\right)^2 + K'^2\left(\frac{mx}{a^2} + \frac{m'y}{b^2} + \frac{m''z}{c^2}\right)^2$$
$$+ K''^2\left(\frac{nx}{a^2} + \frac{n'y}{b^2} + \frac{n''z}{c^2}\right)^2 = 1,$$

et l'on a par identification les six relations

$$K^2 l^2 + K'^2 m^2 + K''^2 n^2 = a^2,$$
$$K^2 l'^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = b^2,$$
$$K^2 l''^2 + \ldots\ldots\ \ldots\ldots = c^2,$$
$$K^2 ll' + K'^2 mm' + K''^2 nn' = 0,$$
$$K^2 ll'' + K'^2 mm'' + \ldots\ \ldots = 0,$$
$$K^2 l'l'' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \ (^*).$$

Il en résulte qu'en ajoutant les équations (a) après les avoir multipliées respectivement par K^2, K'^2, K''^2, il vient

$$a^2 M + b^2 M' + c^2 M'' = 0.$$

Remplaçons enfin M, M', M'' par leurs valeurs tirées de (3) et nous aurons

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} a^2[AV_1^2 - V_1 f'x_1 f'\alpha + f_1(f'\alpha)^2] \\ + b^2[A'V_1^2 - V_1 f'y_1 f'6 + f_1(f'6)^2] \\ + c^2[A''V_1^2 - V_1 f'z_1 f'\gamma + f_1(f'\gamma)^2] = 0; \end{array}\right.$$

c'est l'équation du lieu.

Il suffit de remarquer que V_1, $f'\alpha$, $f'6$, $f'\gamma$ sont des fonctions linéaires de α, 6, γ, pour reconnaître que cette équation représente une surface du second ordre.

Corollaire I. — *L'enveloppe du plan* ABC *est une surface du second ordre, polaire réciproque de* S' *par rapport à* S.

Corollaire II. — *Le lieu des points d'où l'on peut*

(*) Si l'on désigne par a', b', c' les demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde E, parallèles à PA, PB, BC, on sait qu'on a les six relations

$$a'^2 l^2 + b'^2 m^2 + c'^2 n^2 = a^2, \qquad a'^2 ll' + b'^2 mm' + c'^2 nn' = 0,$$
$$a'^2 l'^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = b^2, \qquad a'^2 ll'' + \ldots\ldots\ \ldots\ldots = 0,$$
$$a'^2 l''^2 + \ldots\ \ldots\ldots\ldots = c^2, \qquad a'^2 l' l'' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

ce qui donne la signification des quantités K, K', K''.

mener à une surface du second ordre trois tangentes parallèles à un système de diamètres conjugués d'une surface du second ordre à centre, est une surface du second ordre.

Supposons en effet le point P choisi de telle sorte que les trois droites PA, PB, PC soient tangentes à la surface S, le point M viendra se confondre avec le point P. Remplaçons donc dans (4) α, β, γ par x_1, y_1, z_1; remarquons que V_1 devient alors égal à $2f_1$, et nous trouverons que les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point P doivent satisfaire à l'équation de condition

$$f_1[4f_1(\mathrm{A}a^2+\mathrm{A}'b^2+\mathrm{A}''c^2)-(a^2f'x_1^2+b^2f'y_1^2+c^2f'z_1^2)]=0,$$

qui conduit aux deux solutions

$$f_1=0,$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} 4f_1(\mathrm{A}a^2+\mathrm{A}'b^2+\mathrm{A}''c^2)\\ -(a^2f'x_1^2+b^2f'y_1^2+c^2f'z_1^2)=0.\end{array}\right.$$

La première est étrangère à la question et la seconde représente une surface du second ordre.

Corollaire III. — *Quand la surface directrice est une sphère, on conclut de ce qui précède que :*

1° *Si l'on mène d'un point fixe* P *trois droites rectangulaires qui percent une surface du second ordre en trois points* A, B, C, *le lieu du pôle* M *du plan* ABC, *par rapport à cette surface, est une surface du second ordre ;*

2° *Le lieu des points d'où l'on peut mener à une surface du second ordre trois tangentes rectangulaires est une surface du second ordre.*

Il suffit de faire $a=b=c$ dans les résultats précédents, pour obtenir les équations qui conviennent à ce cas particulier.

Remarque. — La surface S′ est réelle ou imaginaire suivant la position du point P. Le lieu représenté par l'équation (5) partage l'espace en deux régions telles, que, pour tout point P pris dans l'une, la surface S′ est réelle, tandis qu'elle est imaginaire pour tout point P pris dans l'autre.

II. Si le point M (α, β, γ) est supposé fixe, l'équation (4) représente le lieu des points P répondant à ce théorème :

Étant donnés une surface du second ordre S *et un cône circonscrit de sommet* M (α, β, γ), *si on imagine des cônes ayant pour directrice la courbe de contact* ABC *et admettant trois génératrices parallèles à un système de diamètres conjugués d'une surface du second ordre à centre, le lieu des sommets* P *de ces cônes est une surface du second ordre* S′.

L'équation (4) peut se mettre sous la forme

$$HV_1^2 - (a^2 f'\alpha f'x_1 + b^2 f'\beta f'y_1 + c^2 f'\gamma f'z_1) V_1 + f_1(a^2 f'\alpha^2 + b^2 f'\beta^2 + c^2 f'\gamma^2) = 0,$$

en posant

$$A a^2 + A' b^2 + A'' c^2 = H.$$

La surface S'_1 coupe la surface S suivant deux courbes situées dans les plans

(6) $$V_1 = 0,$$

(7) $$HV_1 - (a^2 f'\alpha f'x_1 + b^2 f'\beta f'y_1 + c^2 f'\gamma f'z_1) = 0.$$

Le plan (6), $V_1 = 0$, est le plan ABC de pôle M ; son équation peut s'écrire

$$\alpha f'x_1 + \beta f'y_1 + \gamma f'z_1 + 2cx_1 + 2c'y_1 + 2c''z_1 + 2 = 0.$$

Le plan (7) passe par une droite DE, intersection des

plans

(6) $$V_1 = 0,$$

(8) $$a^2 f' \alpha f' x_1 + b^2 f' \beta f' y_1 + c^2 f' \gamma f' z_1 = 0.$$

Si l'on met l'équation du plan (7) sous la forme

$$\left(\alpha - \frac{a^2 f' \alpha}{H}\right) f' x_1 + \left(\beta - \frac{b^2 f' \beta}{H}\right) f' y_1 + \left(\gamma - \frac{c^2 f' \gamma}{H}\right) f' z_1$$
$$+ 2 c x_1 + 2 c' y_1 + 2 c'' z_1 + 2 = 0,$$

on voit que le pôle N de ce plan a pour coordonnées

$$x_1 = \alpha - \frac{a^2 f' \alpha}{H}, \quad \beta_1 = \beta - \frac{b^2 f' \beta}{H}, \quad \gamma_1 = \gamma - \frac{c^2 f' \gamma}{H}.$$

La droite MN, qui passe par les pôles M et N des deux plans (6) et (7), est la polaire conjuguée de l'intersection DE de ces deux plans, par rapport à la surface S. Elle a pour équation

(9) $$\frac{x - \alpha_1}{a^2 f' \alpha} = \frac{y - \beta_1}{b^2 f' \beta} = \frac{z - \gamma_1}{c^2 f' \gamma}.$$

Cette droite MN est conjuguée du plan (8) par rapport à la surface S, et du plan (6) par rapport à l'ellipsoïde E.

La droite MN perce la surface S aux points F, L; les plans (6), (7) et (8) aux points H, K, O. Les six points M, F, H, K, L, N sont en involution, et le centre d'involution est le point O.

Les plans passant par DE et chacun de ces points forment un faisceau de six plans en involution; le plan central d'involution est le plan (8).

(*La fin prochainement.*)

SUR DEUX QUESTIONS DE MAXIMUM;

PAR M. V.-A. LE BESGUE,
Correspondant de l'Institut.

I.

1. PROBLÈME I. — *Construire un parallélipipède* OABCD, *connaissant les arêtes* $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ *et la diagonale* $OD = d$, *sachant d'ailleurs que les plans diagonaux* DOA, DOB, DOC *sont respectivement perpendiculaires aux faces* BOC, COA, AOB.

PROBLÈME II. — *Construire un tétraèdre* OABC *dont les faces* OBC, OAC, OAB, ABC *ont des aires données* a, b, c, d, *sachant d'ailleurs que les arêtes* OA, OB, OC *sont respectivement perpendiculaires aux arêtes opposées* BC, CA, AB.

On voit tout de suite, pour le problème I, que la condition de perpendicularité revient à dire que le volume doit être maximum, puisque les données a, b, c, d resteraient les mêmes en faisant tourner un plan diagonal sur son intersection avec la face opposée du parallélipipède. Pour le second problème, la condition de perpendicularité revient encore à dire que le volume est maximum; mais pour le voir il faut, ou mettre le problème en équation par l'emploi du calcul différentiel, ou, ce qui est préférable, établir quelques théorèmes qui montrent la corrélation des deux questions, et desquels il résulte que si l'on a remplacé les aires a, b, c, d du second problème par des lignes proportionnelles, et qu'on ait construit avec ces lignes un parallélipipède satisfaisant au problème I, il suffira de mener des plans perpendiculaires aux arêtes

et à la diagonale de ce parallélipipède pour obtenir un tétraèdre dont les faces auront des aires proportionnelles aux aires données et qui conduira à un autre ayant des faces dont les aires seront données. Ce tétraèdre étant construit, on voit tout de suite que le tétraèdre symétrique satisfera encore.

Les deux questions conduisent, comme on va le voir, aux trois mêmes équations entre trois inconnues, et on ramène la solution à celle d'une équation du quatrième degré.

Quand deux des données a, b, c, d sont égales, l'équation du quatrième degré se ramène au second, et la solution est géométrique.

On pourrait donner au problème un autre énoncé. Dans un parallélipipède OABCD, les trois plans diagonaux coupant en leurs milieux les côtés du triangle ABC, leur intersection, qui n'est autre que la diagonale OD, va passer par le centre de gravité g du triangle ABC, et on a $Og = \frac{1}{3}OD$; cette intersection passe aussi par le centre G de gravité du tétraèdre OABC, et on a $OG = \frac{1}{4}OD$; on pourrait donc énoncer ainsi le problème I : *Construire un tétraèdre* OABC *dont on connaît les arêtes* OA, OB, OC *et la distance* OG *du sommet* O *au centre de gravité, sachant d'ailleurs que le plan qui passe par le centre de gravité et une arête est perpendiculaire sur la face opposée.* Comme le tétraèdre a pour volume la sixième partie du volume du parallélipipède, c'est encore un cas de maximum.

II.

Premier problème.

2. *Ire Solution.*—Si l'on désigne par x, y, z les an-

gles des arêtes BOC $= x$, COA $= y$, AOB $= z$, on aura

(1) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos x + 2ca\cos y + 2ab\cos z,$

et pour la condition de perpendicularité

$$(2)\quad \begin{cases} a(\cos y\cos z - \cos x) = b(\cos z\cos x - \cos y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = c(\cos x\cos y - \cos z), \end{cases}$$

ce qui se trouve facilement au moyen de la formule des triangles sphériques rectangles

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma.$$

On verra plus loin comment le calcul différentiel donne les équations (2).

Le système (2) se transforme comme il suit : soient X, Y, Z les angles des perpendiculaires aux trois faces qui passent par b, c; c, a; a, b, c'est-à-dire les suppléments des angles des faces, on aura les formules

$$\cos x\cos y - \cos z = \sin x\sin y\cos Z, \ldots,$$
$$\cos X\cos Y - \cos Z = \sin X\sin Y\cos z, \ldots,$$

de sorte qu'en changeant les binômes de (2) en monômes et divisant par $\sin x\sin y\sin z$, puis remplaçant $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ par les sinus proportionnels $\sin X$, $\sin Y$, $\sin Z$, il vient

$$(1)'\qquad a\cot X = b\cot Y = c\cot Z,$$

d'où il résulte que cos X, cos Y, cos Z seront tous positifs ou tous négatifs.

L'équation (1) devient

$$(2)'\quad \begin{cases} d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cot Y\cot Z \\ \quad + 2ca\cot Z\cot X + 2ab\cot X\cot Y \\ \quad - 2\left(\dfrac{bc\cos X\sin X + ca\cos Y\sin Y + ab\cos Z\sin Z}{\sin X\sin Y\sin Z}\right). \end{cases}$$

Le système $(1)'$ $(2)'$ où les inconnues sont X, Y, Z conduit à l'équation de *Lagrange*.

Si l'on pose

$$a \cot X = b \cot Y = c \cot Z = u,$$

d'où

$$\sin X = \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}, \quad \cos X = \frac{u}{\sqrt{u^2 + a^2}}, \ldots,$$

le radical $\sqrt{u^2 + a^2}$ étant pris positivement, l'équation $(2)'$ deviendra, en faisant, pour abréger,

$$a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 2e,$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 3u^2 + e = u \left[\dfrac{1}{u^2 + a^2} + \dfrac{1}{u^2 + b^2} + \dfrac{1}{u^2 + c^2} \right] \\ \quad \times \sqrt{(u^2 + a^2)(u^2 + b^2)(u^2 + c^2)}. \end{array} \right.$$

En voici la discussion : c'est une simplification de celle donnée par M. Painvin (*Nouvelles Annales*, 1862; p. 353 et suivantes).

Nous ferons

$$(u^2 + a^2)(u^2 + b^2)(u^2 + c^2) = u^6 + Au^4 + Bu^2 + C,$$

$$A = a^2 + b^2 + c^2, \quad B = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \quad C = a^2b^2c^2;$$

l'équation en u deviendra, en posant $u^2 = \theta$,

$$\theta(3\theta^2 + 2A\theta + B)^2 - (\theta^3 + A\theta^2 + B\theta + C)(9\theta^2 + 6e\theta + e^2) = 0$$

ou

$$(4) \qquad 3d^2\theta^4 + P_1\theta^3 + P_2\theta^2 + P_3\theta - Ce^2 = 0,$$

en posant

$$P_1 = 4A^2 - 3B - 6Ae - e^2, \quad P_2 = 4AB - 9C - 6Be - Ae^2,$$
$$P_3 = B^2 - 6Ce - Be^2.$$

3. Pour discuter facilement cette équation, supposons

$a > b > c > d$: il en résultera e positif; donc u le sera aussi, d'après l'équation (3). Il faut prendre les valeurs positives de θ^2, puis faire $u = \sqrt{\theta}$. Or, il n'y a qu'une racine positive. En effet, le premier terme de l'équation (4) étant positif et le dernier négatif, on a déjà une racine positive et une négative pour θ. De plus, si l'on pose

$$4P_3 = -[B(2e)^2 + 12C(2e) - 4B^2],$$

comme on a

$$2e > a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad 2e < a^2 + b^2 + c^2,$$

même en mettant pour $2e$ dans $4P_3$ sa moindre limite $a^2 + b^2$, la quantité

$$B(2e)^2 + 12C(2e) - 4B^2 = U$$

sera positive, comme on le voit en posant

$$a^2 = c^2 + \alpha, \quad b^2 = c^2 + \beta,$$

et ordonnant U suivant les puissances de c^2; car, réduction faite, tous les termes sont essentiellement positifs. Il suit de là que P_3 est négatif dans tous les cas. De plus, si l'on remarque que

$$AP_1 - P_2 = 4A^3 - 7AB + 9C - 6e(A^2 - B),$$

où $A^2 - B$ est essentiellement positif, reste positif même quand on met pour $2e$ sa plus grande limite A, puisque l'on a

$$AP_1 - P_2 > A^3 - 4AB + 9C,$$

et qu'en posant

$$a^2 = c^2 + \alpha, \quad b^2 = c^2 + \beta,$$

on a pour $A^3 - 4AB + 9C$ une quantité essentiellement positive, il faut donc, si P_2 est positif, avoir P_1 positif, et l'équation n'a qu'une variation; si P_2 est négatif, P_1

peut être positif ou négatif, mais il n'y a encore qu'une variation. Ainsi θ a une seule valeur positive.

Pour la réalité de la solution il faut que les deux conditions

$$X+Y+Z<4 \text{ droits}, \quad Y+Z-X>0$$

soient satisfaites ; or, comme X, Y, Z sont aigus, la première l'est nécessairement. Comme $Y+Z-X$ est inférieur à deux droits, il faut que

$$\operatorname{tang}(Y+Z-X)$$

$$=\frac{\operatorname{tang} Y+\operatorname{tang} Z-\operatorname{tang} X+\operatorname{tang} X \operatorname{tang} Y \operatorname{tang} Z}{1-\operatorname{tang} Y \operatorname{tang} Z+\operatorname{tang} Z \operatorname{tang} X+\operatorname{tang} X \operatorname{tang} Y}$$

soit positif. Or le second membre devient

$$\frac{u^2(b+c-a)+abc}{u(u^2+ab+ac-bc)}$$

et le dénominateur est positif; le numérateur devra l'être, ce qui arrive toujours pour $b+c-a>0$ ou $=0$. Mais si $a-b-c$ est positif, il faut avoir

$$u^2<\frac{abc}{a-b-c}<\frac{abc}{\delta},$$

en posant

$$a-b-c=\delta.$$

Cherchons ce que devient pour $u^2=\frac{abc}{\delta}$ la quantité

$$\begin{aligned}P=u^2[(u^2+a^2)(u^2+b^2)+(u^2+b^2)(u^2+c^2)\\ +(u^2+c^2)(u^2+a^2)]^2-(3u^2+e)^2(u^2+a^2)(u^2+b^2)(u^2+c^2);\end{aligned}$$

car l'équation (4) n'est autre que $P=0$.

Comme on trouve

$$u^2+a^2=\frac{a}{\delta}(b+\delta)(c+\delta),$$

$$u^2 + b^2 = \frac{b}{\delta}(a-\delta)(c+\delta),$$

$$u^2 + c^2 = \frac{c}{\delta}(a-\delta)(b+\delta),$$

il en résulte

$$\begin{aligned} 4\delta^2 P &= [6abc + 2\delta(ab + ac - bc)]^2 \\ &\quad - [6abc + \delta(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)]^2 \\ &= [12abc + \delta(a^2 + b^2 + c^2 - d^2 + 2ab + 2ac - 2bc)] \\ &\quad \times (d^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2ac - 2bc)\delta. \end{aligned}$$

Or, le premier et le troisième facteurs sont positifs, le second peut se mettre sous la forme d'un produit

$$d^2 - (a-b-c)^2 = (d+a-b-c)(d+b+c-a)$$

essentiellement positif, chaque facteur l'étant, puisque dans un quadrilatère gauche un côté est moindre que la somme des trois autres.

Comme $u^2 = \frac{abc}{\delta}$ donne à P le signe $+$ et que $u = 0$ donne à P le signe $-$, la valeur de u^2 est comprise entre 0 et $\frac{abc}{a-b-c}$.

On trouve donc un seul système de valeurs réelles pour X, Y, Z, et par suite un aussi pour x, y, z; mais avec ces valeurs on peut faire deux tétraèdres symétriques qui satisfont à la question.

Nous avons supposé $a > b > c > d$, mais il est à remarquer que si les arêtes $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ et la diagonale $OD = d$ sont prolongées de sorte que

$$OA' = a, \quad OB' = b, \quad OC' = c, \quad OD' = d,$$

on formera autour de O huit parallélipipèdes équivalents symétriques deux à deux. En ne prenant que les quatre

qui n'en contiennent pas deux symétriques, on voit que dans l'un la diagonale sera a, dans l'autre b, dans un troisième c, dans le quatrième d. D'ailleurs, si dans l'un la condition de perpendicularité des plans diagonaux sur les faces opposées est satisfaite, elle le sera aussi dans les autres : on peut donc supposer sans inconvénient que l'on a

$$a > b > c > d.$$

4. *IIᵉ Solution.* — Dans le système

$$a(\cos y \cos z - \cos x) = b(\cos z \cos x - \cos y)$$
$$= c(\cos x \cos y - \cos z),$$
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos x + 2ca\cos y + 2ab\cos z$$

on prendra

$$b^2 + c^2 + 2bc\cos x = r^2,$$
$$c^2 + a^2 + 2ca\cos y = s^2,$$
$$a^2 + b^2 + 2ab\cos z = t^2.$$

r, s, t seront les diagonales des faces. On aura d'abord, en posant

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \sigma^2,$$

l'équation

$$\sigma^2 = r^2 + s^2 + t^2.$$

Les conditions de perpendicularité deviendront

$$(a)\quad \begin{cases} r^4 - r^2\sigma^2 + (d^2 - a^2)(c^2 - b^2) = -2r^2t^2, \\ s^4 - s^2\sigma^2 + (d^2 - b^2)(a^2 - c^2) = -2s^2r^2, \\ t^4 - t^2\sigma^2 + (d^2 - c^2)(b^2 - a^2) = -2t^2s^2; \end{cases}$$

on pourrait aussi prendre

$$(b)\quad \begin{cases} r^4 - r^2\sigma^2 + (d^2 - a^2)(b^2 - c^2) = -2r^2s^2, \\ s^4 - s^2\sigma^2 + (d^2 - b^2)(c^2 - a^2) = -2s^2t^2, \\ t^4 - t^2\sigma^2 + (d^2 - c^2)(a^2 - b^2) = -2t^2r^2; \end{cases}$$

ces équations ajoutées membre à membre avec les précédentes donnent

$$r^2 + t^2 + s^2 = \sigma^2.$$

Si l'on prend la valeur de t^2 dans la première équation (a) et qu'on la substitue dans la dernière équation (b), on trouve

$$(c)\left\{\begin{array}{l} 3r^8 - 4(a^2+b^2+c^2+d^2)\,r^6 + [(a^2-d^2)^2 + (b^2-c^2)^2 \\ \qquad + 4(a^2+d^2)(b^2+c^2)]\,r^4 - (d^2-a^2)^2(b^2-c^2)^2 = 0. \end{array}\right.$$

La permutation tournante des lettres a, b, c donnerait de semblables équations en s et t.

Si l'on pose

$$\pm(a-d) = \alpha, \quad \pm(b-c) = \beta, \quad a+d = \gamma, \quad b+c = \delta,$$

en choisissant les signes de manière à rendre α, β positifs, on a d'abord

$$2(a^2+d^2) = \alpha^2+\gamma^2, \quad 2(b^2+c^2) = \beta^2+\delta^2,$$
$$(d^2-a^2)^2 = \alpha^2\gamma^2, \qquad (b^2-c^2)^2 = \beta^2\delta^2,$$

ce qui change l'équation (c) en

$$(d)\left\{\begin{array}{l} 3r^8 - 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\,r^6 \\ \quad + (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2)\,r^4 \\ \quad - \alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2 = 0, \end{array}\right.$$

qui revient à

$$(e)\left\{\begin{array}{l} Q = r^2(r^2-\alpha^2)(r^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2) + r^2(r^2-\alpha^2)(r^2-\beta^2)(r^2-\delta^2) \\ \quad + r^2(r^2-\alpha^2)(r^2-\gamma^2)(r^2-\delta^2) + r^2(r^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2)(r^2-\delta^2) \\ \quad - (r^2-\alpha^2)(r^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2)(r^2-\delta^2) = 0. \end{array}\right.$$

Si dans cette équation on met pour r^2

$$-\infty, \quad 0, \quad \alpha^2, \quad \beta^2, \quad \gamma^2, \quad \delta^2,$$

on voit que Q prend les signes

$$+,\quad -,\quad -,\quad +,\quad -1,\quad +,$$

de sorte qu'il y a une valeur de r^2 tombant entre $-\infty$ et o, c'est-à-dire négative, et trois valeurs positives, l'une entre α^2 et β^2, la seconde entre β^2 et γ^2, la troisième entre γ^2 et δ^2.

Par exemple, si les nombres positifs

$$\pm(c-b),\quad \pm(d-a),\quad b+c,\quad a+d$$

sont rangés par ordre de grandeur, la valeur de r tombera entre $d-a$ et $b+c$, comme le montrerait la figure.

Quand deux des quatre quantités a, b, c, d sont égales, b et c par exemple, ou d et a, l'équation (c) s'abaisse au second degré et la construction est géométrique.

5. *IIIe Solution.* — La forme (e), la plus commode pour la discussion, se présente tout de suite quand on considère les triangles formés par b, c, r et a, d, r comme perpendiculaires.

Soient t et t' les aires de ces triangles : le volume du parallélipipède est $\frac{2t\times 2t'}{r}$, il faut donc rendre $\frac{t^2t'^2}{r^2}$ maximum. Or on a

$$4t^2 = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-r^2)^2 = [(b+c)^2-r^2][r^2-(b-c)^2],$$
$$4t'^2 = 4a^2d^2 - (a^2+d^2-r^2)^2 = [(a+d)^2-r^2][r^2-(a-d)^2],$$

d'où l'on tire

$$\frac{16t^2t'^2}{r^2} = \frac{(r^2-\alpha^2)(r^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2)(r^2-\delta^2)}{r^2}.$$

Si l'on prend la dérivée par rapport à r en l'égalant à zéro, on aura l'équation (c) qui revient à $Q=0$.

III.

6. Si l'on coupe le tétraèdre, dont les arêtes sont $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, par un plan perpendiculaire à OA, les hauteurs des deux parallélogrammes qui ont OA pour base commune seront $b \sin z$, $c \sin y$, et comme elles font l'angle X, l'aire de la section droite sera $bc \sin y \sin z \sin X$, par conséquent le volume V du parallélipipède sera

$$V = abc \sin x \sin y \sin z \frac{\sin Z}{\sin z};$$

en posant

$$k = \frac{\sin X}{\sin x} = \frac{\sin Y}{\sin y} = \frac{\sin Z}{\sin z},$$

on aura donc

$$V^2 = a^2 b^2 c^2 . \sin^2 x \sin^2 y \sin^2 z . k^2,$$

d'où l'on tire

$$V^4 = (bc \sin x)^2 (ca \sin y)^2 (ab \sin z)^2 \sin^2 x \sin^2 y \sin^2 z . k^4,$$

ou

$$V^4 = a_1^2 b_1^2 c_1^2 \sin^2 X \sin^2 Y \sin^2 Z \left(\frac{1}{k}\right)^2,$$

en représentant par a_1, b_1, c_1 les aires des trois faces du parallélipipède qui passent par le sommet O.

Or, si l'on regarde $a_1 b_1 c_1$ comme des lignes qui représentent les aires, en menant les droites OA', OB', OC' perpendiculaires aux plans BOC, COA, AOB, mais non du même côté que OA, OB, OC, on verra que ces lignes font entre elles des angles suppléments de ceux que font entre elles les faces de l'angle trièdre OABC, de sorte que si les perpendiculaires sont égales à a_1, b_1, c_1, la quantité V^4 sera égale à V'^2, V' étant le volume du parallélipipède dont les arêtes sont $OA' = a_1$, $OB' = b_1$, $OC' = c_1$.

L'équation $V' = V^2$ montre que quand le premier parallélipipède atteint son maximum, il en est de même du second, et par conséquent aussi du tétraèdre OA'B'C' qui en est la sixième partie, ou encore les tétraèdres OABC, OA'B'C' atteignent ensemble leur maximum.

Or, les plans diagonaux du premier parallélipipède sont respectivement perpendiculaires aux arêtes A'B', B'C', C'A', savoir : le plan DOC à A'B', le plan DOA à B'C' et le plan DOB à C'A'. En effet, si l'on coupe le parallélipipède perpendiculairement à l'arête OA, on formera une section droite *oadb*, dont les côtés *oa*, *ob* et la diagonale *od* seront proportionnels aux aires des faces du parallélipipède et de son parallélogramme diagonal passant par O. Or si, dans le plan de la section droite *oadb*, on mène à *oa* une perpendiculaire $oa' = oa$ et à *ob* une perpendiculaire $ob' = ob$, de sorte que l'angle *a'ob'* soit supplément de *aob*, le parallélogramme *oa'd'b'* sera égal au parallélogramme *oadb*, et sa diagonale *a'b'* sera égale et perpendiculaire à *od*. De là on conclut que le plan diagonal est perpendiculaire à *a'b'*. Il en serait encore de même si l'on remplaçait *oa'*, *ob'* par des droites proportionnelles. On voit donc que les plans diagonaux, qui dans le parallélipipède primitif passent par le point O, sont respectivement perpendiculaires aux côtés A'B', B'C', C'A' du triangle A'B'C'. Ils sont donc perpendiculaires à A'B'C' et leur intersection OD l'est aussi.

Comme pour le cas du maximum du premier parallélipipède les plans diagonaux sont perpendiculaires aux faces opposées, il s'ensuivra que dans le second parallélipipède les arêtes OA', OB', OC' sont perpendiculaires aux droites A'B', B'C', C'A'. Autrement le tétraèdre OA'B'C' a ses arêtes opposées perpendiculaires entre elles.

Si, par le point O, on menait perpendiculairement aux faces A'OB', B'OC', C'OA' des perpendiculaires, elles

coïncideraient avec OA, OB, OC, et si on les prenait proportionnelles aux aires des faces des parallélogrammes qui ont pour côtés OA′, OB′, OC′, elles seraient égales à a, b, c multipliées par le facteur constant V. Puisqu'elles sont proportionnelles à a, b, c, on conclurait, comme plus haut, que OD′ est perpendiculaire à ABC. Maintenant on peut considérer la face ABC comme la somme algébrique des trois projections des faces OAB, OAC, OBC sur ABC, mais OD′ est aussi la somme algébrique des projections de OA′, OB′, OC′ sur OD′. Donc OD′ est proportionnelle à ABC. Donc en menant des plans perpendiculaires à OA′, OB′, OC′, OD′, on a un tétraèdre dont les faces ont des aires données proportionnelles aux lignes OA′, OB′, OC′, OD′. De ce tétraèdre on passera à un autre dont les faces auront précisément les aires demandées. Au lieu de ce tétraèdre on pourra prendre le tétraèdre symétrique. Il est facile de voir que ce qui précède s'accorde avec la Note de M. Paul Serret (*Nouvelles Annales*, 1863, p. 79). Cette Note a pour objet d'établir une corrélation qui n'est autre au fond que la précédente.

On pourrait développer davantage ce qui concerne les parallélipipèdes OABCD, OA′B′C′D′; mais cela a déjà été fait. On n'a mis ici que ce qui est nécessaire pour bien montrer la corrélation des deux questions, objets de cette Note.

Si l'on prolongeait OD′ de OD″ = OD′, le tétraèdre A′B′C′D″ serait le tétraèdre dérivé des aires dont s'est occupé M. Painvin dans le dernier paragraphe du Mémoire déjà cité. Sa théorie est-elle bien nouvelle, et ne pourrait-elle pas s'établir d'une manière plus simple? On peut se proposer d'établir par la Géométrie et la Trigonométrie élémentaires les propriétés géométriques du tétraèdre OABC à volume maximum, et où OA, OB, OC, OG ont des valeurs données (G est le centre de gravité),

et du tétraèdre OABC à volume maximum dont les faces ont des aires données. Cette marche est sans doute plus simple que l'emploi des déterminants.

IV.

Second problème.

7. On suppose les arêtes opposées d'un tétraèdre perpendiculaires entre elles. Si les arêtes issues du point O sont a, b, c, faisant les angles $\mathrm{BOC}=x$, $\mathrm{COA}=y$, $\mathrm{AOB}=z$, les arêtes opposées étant perpendiculaires, il faut que les perpendiculaires abaissées de B, C, ($\mathrm{OB}=b$, $\mathrm{OC}=c$) sur OA aient le même pied. Ainsi

$$b\cos z = c\cos y \quad \text{ou} \quad \frac{\cos y}{b}=\frac{\cos z}{c}.$$

Le système

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos y}{b}=\frac{\cos z}{c}$$

exprime donc la perpendicularité des arêtes opposées; il revient à

$$bc\sin x\cot x = ac\sin y\cot y = ab\sin z\cot z,$$

ou

$$a_1\cot x = b_1\cot y = c_1\cot z,$$

ou encore

$$a_1\frac{\cos x}{\sin \mathrm{X}} = b_1\frac{\cos y}{\sin \mathrm{Y}} = c_1\frac{\cos z}{\sin \mathrm{Z}},$$

ou bien

$$a_1\sin \mathrm{Y}\sin \mathrm{Z}\cos x = b_1\sin \mathrm{X}\sin \mathrm{Z}\cos y = c_1\sin \mathrm{X}\sin \mathrm{Y}\cos z,$$

ou enfin

$$a_1(\cos \mathrm{Y}\cos \mathrm{Z}-\cos \mathrm{X}) = b_1(\cos \mathrm{Z}\cos \mathrm{X}-\cos \mathrm{Y})$$
$$= c_1(\cos \mathrm{X}\cos \mathrm{Y}-\cos \mathrm{Z}).$$

Ces équations sont toutes semblables à celles du premier système.

Si l'on représente par d_1 l'aire de la quatrième face, on trouve comme il suit l'équation

$$d_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2b_1c_1\cos X + 2c_1a_1\cos Y + 2a_1b_1\cos Z,$$

qui revient à

$$d_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos(b_1, c_1) - 2c_1a_1\cos(c_1, a_1) - 2a_1b_1\cos(a_1, b_1).$$

C'est une conséquence des équations suivantes, d'où nous ôtons les indices pour abréger :

$$a = b\cos(a, b) + c\cos(a, c) + d\cos(a, d),$$
$$b = c\cos(b, c) + a\cos(b, a) + d\cos(b, d),$$
$$c = a\cos(c, a) + b\cos(c, b) + d\cos(c, d),$$
$$d = a\cos(d, a) + b\cos(d, b) + c\cos(d, c).$$

De là

$$d^2 = ad\cos(d, a) + bd\cos(d, b) + cd\cos(d, c);$$

mais les équations précédentes donnent

$$ad\cos(a, d) = a^2 - ab\cos(a, b) - ac\cos(a, c),$$
$$bd\cos(b, d) = b^2 - bc\cos(b, c) - ba\cos(b, a),$$
$$cd\cos(c, d) = c^2 - ca\cos(c, a) - cb\cos(c, b);$$

d'où pour d^2 la valeur

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos(b, c) - 2ca\cos(c, a) - 2ab\cos(a, b).$$

Cette démonstration est sans doute connue. Si l'on mettait cette valeur sous la forme

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos(b, c) - 2a[c\cos(c, a) + b\cos(a, b)]$$

ou

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos(b, c) - 2a[a - d\cos(a, d)],$$

on aurait

$$d^2 + a^2 - 2ad\cos(a, d) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(b, c),$$

équation connue, et qui a différentes significations géométriques, soit comme double valeur du carré d'une diagonale d'un quadrilatère gauche, soit comme double valeur du carré de l'aire d'un parallélogramme diagonal dans un parallélipipède.

Ainsi l'on voit, par ce qui précède, que les équations du second problème sont précisément les mêmes que celles du premier.

8. Si l'on remarque que l'on a

$$k^2 = \frac{\sin^2 X}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos^2 X}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z + 2\cos x \cos y \cos z}{\sin^2 x \sin^2 y \sin^2 z},$$

et que, de même,

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 X} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 X}$$
$$= \frac{1 - \cos^2 X - \cos^2 Y - \cos^2 Z + 2\cos X \cos Y \cos Z}{\sin^2 X \sin^2 Y \sin^2 Z}.$$

on aura

$$V^2 = a^2 b^2 c^2 (1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z + 2\cos x \cos y \cos z),$$

et

$$V^4 = a_1^2 b_1^2 c_1^2 (1 - \cos^2 X - \cos^2 Y - \cos^2 Z + 2\cos X \cos Y \cos Z).$$

Si l'on remplace a_1, b_1, c_1 par $2a'$, $2b'$, $2c'$, a', b', c' étant les aires des faces du tétraèdre dont le volume T est donné par l'équation $V = 6T$, il viendra

$$(6T)^4 = 4^3 a'^2 b'^2 c'^2$$
$$\times (1 - \cos^2 X - \cos^2 Y - \cos^2 Z + 2\cos X \cos Y \cos Z).$$

Donc, si l'on veut avoir le maximum de V et de T, en ayant égard aux relations

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,bc\cos x + 2\,ca\cos y + 2\,ab\cos z,$$

$$d'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2\,b'c'\cos X + 2\,c'a'\cos Y + 2\,a'b'\cos Z,$$

le calcul différentiel donnera immédiatement

$$\frac{\cos y\cos z - \cos x}{bc} = \frac{\cos z\cos x - \cos y}{ca} = \frac{\cos x\cos y - \cos z}{ab},$$

$$\frac{\cos Y\cos Z - \cos X}{b'c'} = \frac{\cos Z\cos X - \cos Y}{c'a'} = \frac{\cos X\cos Y - \cos Z}{a'b'},$$

qui sont précisément les équations trouvées plus haut par des considérations géométriques.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 295

(voir 2e série, t. I, p. 64);

PAR M. J. B.,
Élève en Mathématiques spéciales.

ÉNONCÉ. — *Par un point* P *pris dans le plan d'une courbe algébrique* M, *on mène des normales à cette courbe qui la rencontrent aux points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$. *On suppose que la somme des carrés de ces normales est égale à* p^2, *quantité constante. Le point* P *engendre une courbe* M_1; *la normale à cette courbe, menée par le point* P, *passe par le centre des moyennes distances des points* A_1, A_2, *etc.*

Soient $y = f(x)$ l'équation de la courbe M; x_0, y_0 les coordonnées du point P; (x_1, y_1), (x_2, y_2), etc., les coordonnées des points A_1, A_2, etc.

On a, par hypothèse,

$$(1)\qquad \sum[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]=p^2.$$

L'équation de la normale en A_1 est

$$y-y_1=-\frac{1}{y'_1}(x-x_1);$$

elle passe par le point P, donc

$$(2)\qquad (y_0-y_1)y'_1+(x_0-x_1)=0.$$

Je prends la dérivée de (1), par rapport à x_0, en appliquant le théorème des fonctions composées :

$$\sum\{x'_{x_0}[(y_0-y_1)y'_1+(x_0-x_1)]+(y_0-y_1)y'_0+x_0-x_1\}=0.$$

En vertu de l'équation (2), j'ai donc

$$\sum[(y_0-y_1]y'_0+x_0-x_1]=0,$$

égalité que je puis écrire ainsi :

$$(ny_0-\Sigma y_1)y'_0+nx_0-\Sigma x_1=0,$$

ou

$$(3)\qquad \left(y_0-\frac{\Sigma y_1}{n}\right)y'_0+x_0-\frac{\Sigma x_1}{n}=0.$$

L'équation de la normale en P, au lieu des points P, est

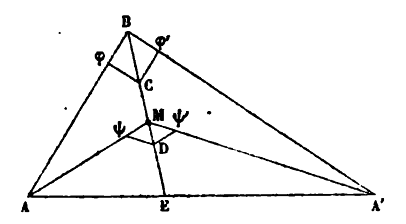
$$y-y_0=-\frac{1}{y'_0}(x-x_0),\quad \text{ou}\quad (y_0-y)y'_0+x_0-x=0.$$

Il faut démontrer que cette droite passe par le centre des moyennes distances des points A_1, A_2, ..., dont les coordonnées sont $\frac{\Sigma y_1}{n}$, $\frac{\Sigma x_1}{n}$; c'est précisément ce qui est exprimé par la relation (3).

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE DU CONCOURS DE 1862 (RHÉTORIQUE SCIENTIFIQUE);

PAR M. ABRAHAM SCHNÉE,
Élève du lycée Charlemagne.

Un point matériel M, *placé en un point donné* B, *sans vitesse initiale, se meut sous l'influence de deux forces attractives dirigées vers deux centres fixes* A *et* A'; *les intensités de ces forces varient proportionnellement aux distances du point attiré aux centres fixes, et elles prennent respectivement les valeurs données g, g', lorsque les distances* MA, MA' *deviennent égales à l'unité de longueur. On demande de déterminer la trajectoire du point matériel* M, *ainsi que la loi du mouvement.*



Soit entre les centres fixes un point E tel que

$$\frac{AE}{A'E} = \frac{g'}{g}.$$

Menons BE; soient M et D deux points de cette droite; menons MA, MA', et par D, les droites Dψ, Dψ' respectivement parallèles à MA', MA. Les triangles MAE, MA'E, de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases AE,

A'E; ainsi

$$\frac{\text{surf MAE}}{\text{surf MA'E}} = \frac{\text{AE}}{\text{A'E}}.$$

La figure $M\psi D\psi'$ est un parallélogramme, donc

$$\text{surf MD}\psi = \text{surf MD}\psi',$$

et l'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{\text{AE}}{\text{A'E}} = \frac{\dfrac{\text{surf MAE}}{\text{surf MD}\psi}}{\dfrac{\text{surf MA'E}}{\text{surf MD}\psi'}}.$$

Les triangles MAE, $MD\psi$ ont un angle commun ; il en est de même des triangles MA'E, $MD\psi'$. Donc

$$\frac{\text{surf MAE}}{\text{surf MD}\psi} = \frac{\text{MA.ME}}{\text{MD.M}\psi}, \quad \frac{\text{surf MA'E}}{\text{surf MD}\psi'} = \frac{\text{MA'.ME}}{\text{MD.M}\psi'},$$

et par suite

$$\frac{\text{AE}}{\text{A'E}} = \frac{\text{MA}}{\text{MA'}} \cdot \frac{\text{M}\psi'}{\text{M}\psi} = \frac{g'}{g}.$$

On tire de là

$$\frac{\text{M}\psi'}{\text{M}\psi} = \frac{\text{MA'}.g'}{\text{MA}.g}.$$

Si donc, à un instant quelconque, le mobile se trouve sur la droite BE, d'après l'énoncé et l'équation précédente il se mouvra sur cette droite, pourvu qu'il parte du repos : c'est précisément ce qui a lieu dans le cas qui nous occupe.

Des relations

$$\text{B}\varphi = \text{BA}.g, \quad \text{M}\psi = \text{MA}.g,$$

on déduit par division

$$\frac{\text{B}\varphi}{\text{M}\psi} = \frac{\text{BA}}{\text{MA}},$$

ce qui prouve que la droite $\varphi\psi$ est parallèle à BE. Les triangles $B\varphi C$, $M\psi D$ ont donc même hauteur, et par suite ces triangles, ou les parallélogrammes $B\varphi C\varphi'$, $M\psi D\psi'$ sont entre eux comme les lignes BC, MD; on a donc

$$\frac{B\varphi . B\varphi' \sin B}{M\psi . M\psi' \sin M} = \frac{BC}{MD},$$

et en remplaçant $B\varphi$, $B\varphi'$, $M\psi$, $M\psi'$ par leurs valeurs,

$$\frac{BA . BA' \sin B}{MA . MA' \sin M} = \frac{BC}{MD}.$$

Le premier membre est égal au rapport des triangles BAA', MAA' qui ayant même base sont entre eux comme leurs hauteurs, ou, ce qui revient au même, comme les segments BE, ME; on a donc

$$\frac{BC}{MD} = \frac{BE}{ME};$$

et comme BC et BE sont des quantités fixes, il en résulte que la force qui sollicite le corps est proportionnelle à sa distance au point E. Elle est maximum en B, et nulle en E. La vitesse du corps est au contraire nulle en B et maximum en E.

A partir de E le corps continue à se mouvoir en ligne droite, mais d'un mouvement retardé, et, pour deux positions symétriques du mobile par rapport à E, il est animé de vitesses égales mais de sens contraires. Il en résulte qu'ayant parcouru un espace $EB' = BE$, sa vitesse est nulle, et il se dirige de nouveau vers E; son mouvement est oscillatoire.

QUESTION 655;

SOLUTION DE M. CORNILLE,
Élève du lycée de Strasbourg (classe de M. Saint-Loup).

ENONCÉ. — *Soient* OA, OB *les demi-axes d'une ellipse dont le centre est* O; ANC *la circonférence décrite du point* O *comme centre avec* OA *pour rayon;* NM *une perpendiculaire à l'axe* OA, *rencontrant l'ellipse au point* M *et la circonférence* ANC *au point* N; P *le point où l'ellipse est rencontrée par le rayon vecteur* ON, *et* Q *le point de rencontre de la circonférence et d'une perpendiculaire à l'axe* OA, *menée par le point* P : *si l'on prend* OR = OP *sur la direction du rayon* OQ, *la droite* RM *sera tangente à l'ellipse et perpendiculaire à* OR.

(SACCHI.)

Soient x', y' les coordonnées du point M, on aura la relation

$$(1) \qquad a^2 x'^2 + b^2 y'^2 = a^2 b^2.$$

Les coordonnées du point N seront x', $\frac{ay'}{b}$, et l'équation du rayon vecteur ON sera, par conséquent,

$$y = \frac{ay'}{bx'} x.$$

Si l'on détermine les coordonnées du point d'intersection de cette droite et de l'ellipse, on obtiendra

$$x = \frac{ab^2 x'}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}, \quad y = \frac{a^2 b y'}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}.$$

On aura alors pour les coordonnées du point Q

$$x = \frac{ab^2 x'}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}, \quad y = \frac{a^3 y'}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}.$$

L'équation de la droite OQ sera donc

$$(2) \qquad y = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} x.$$

On voit déjà que cette droite (2) est perpendiculaire à la tangente à l'ellipse menée au point (x', y').

Le cercle

$$x^2 + y^2 = \overline{\mathrm{OP}}^2 = \frac{a^4 b^4}{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}$$

coupe la droite (2) en un point dont les coordonnées sont évidemment

$$(3) \qquad x = \frac{a^2 b^4 x'}{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}, \quad y = \frac{a^4 b^2 y'}{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}.$$

L'équation de la tangente à l'ellipse au point M est

$$(4) \qquad a^2 y y' + b^2 x x' = a^2 b^2,$$

et, en cherchant les coordonnées de son intersection avec la droite (2), on trouve identiquement les valeurs (3). Le théorème est ainsi démontré.

Note. — La même question a été résolue par MM. Ch. de Trenquelléon; J.-Ch. Dupain; A. M., élève du collége de Douai; Godart, élève de M. Bourgeois; Albin Laval, élève du lycée de Lyon; Auguste Grouard, élève du lycée Louis-le-Grand; G. Monniot; A. Pelletreau, élève en spéciales à Poitiers; Demmler; A. Mastio, élève en spéciales au lycée de Rouen (classe de M. Vincent); John Risser; Abraham Schnée, élève du lycée Charlemagne; C. B. (de Gand); Ch. Contet, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon (classe de M. Chevilliet); P. R., du collége Rollin; Arthur Grassat, élève de Mathématiques spéciales; René Passaguay, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

QUESTION 641 ;

SOLUTION DE M. A. G.,
Élève en Mathématiques élémentaires (Rhétorique scientifique).

Démontrer la relation

$$\begin{aligned}&\cos(a+b+c)\cos(a+b-c)\cos(a+c-b)\cos(b+c-a)\\&\quad-4\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c\\&=-(\cos a+\cos b+\cos c)(\cos a+\cos b-\cos c)\\&\quad\times(\cos a+\cos c-\cos b)(\cos b+\cos c-\cos a).\end{aligned}$$

(CATALAN.)

On a

$$\begin{aligned}&(\cos a+\cos b+\cos c)(\cos a+\cos b-\cos c)\\&=2\cos a\cos b+(\cos^2 a+\cos^2 b-\cos^2 c)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(\cos a+\cos c-\cos b)(\cos b+\cos c-\cos a)\\&=2\cos a\cos b-(\cos^2 a+\cos^2 b-\cos^2 c).\end{aligned}$$

Multipliant membre à membre les égalités précédentes et nommant P le premier membre de l'égalité résultant de cette multiplication, il vient

$$\begin{aligned}P=&\,2\cos^2 a\cos^2 b+2\cos^2 a\cos^2 c+2\cos^2 b\cos^2 c\\&-\cos^4 a-\cos^4 b-\cos^4 c.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\cos(a+b+c)\cos(a+b-c)=\cos^2(a+b)+\cos^2 c-1$$

et

$$\cos(a+c-b)\cos(b+c-a)=\cos^2(a-b)+\cos^2 c-1.$$

La multiplication de ces deux dernières égalités donne,

en nommant P′ le produit des quatre facteurs des premiers membres,

$$\begin{aligned}P' &= [\cos(a+b)\cos(a-b)]^2 + [\cos^2(a+b)+\cos^2(a-b)] \\ &\quad \times(\cos^2 c - 1) + (\cos^2 c - 1)^2 \\ &= (\cos^2 a + \cos^2 b - 1)^2 + (4\cos^2 a\cos^2 b - 2\cos^2 a - 2\cos^2 b + 2) \\ &\quad \times(\cos^2 c - 1) + (\cos^2 c - 1)^2;\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}P' = \cos^4 a + \cos^4 b + \cos^4 c - 2\cos^2 a\cos^2 b - 2\cos^2 a\cos^2 c \\ - 2\cos^2 b\cos^2 c + 4\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c;\end{aligned}$$

donc

$$P' - 4\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c = -P.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

SOLUTION DE LA QUESTION 653;

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon (institution Sainte-Barbe).

---

1. Démontrer l'identité

$$(\text{A}) \left\{\begin{aligned} &(+\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c)^2 - 4\sin^2(a+b+c) \\ &\times(\cos^2 a\cos^2 b + \cos^2 b\cos^2 c + \cos^2 c\cos^2 a) \\ &- 4\cos a\cos b\cos c\cos(a+b+c) \\ &\times[\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + \cos^2(a+b+c)] \\ &- 2\cos^2(a+b+c)(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) \\ &+ 4\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c \\ &+ 8\cos a\cos b\cos c\cos(a+b+c) \\ &+ \cos^4(a+b+c) \end{aligned}\right\} = 0.$$

(STREBOR.)

2. Rappelons les identités connues

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos(p+q)+\cos(p-q)=2\cos p\cos q,\\ &\cos(p+q)\cos(p-q)=\cos^2 p+\cos^2 q-1,\\ &\cos^2(p+q)+\cos^2(p-q)=4\cos^2 p\cos^2 q-2\cos^2 q\\ &\qquad\qquad -2\cos^2 p+2.\end{aligned}\right.$$

3. On a identiquement

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &[x-\cos(+a+b+c)][x-\cos(-a+b+c)]\\ &=x^2-2\cos a\cos(b+c)x+[\cos^2(b+c)+\cos^2 a-1].\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &[x-\cos(+a-b+c)][x-\cos(+a+b-c)]\\ &=x^2-2\cos a\cos(b-c)x+[\cos^2(b-c)+\cos^2 a-1].\end{aligned}\right.$$

4. Multipliant (1) et (2) membre à membre, on a la nouvelle identité

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &[x-\cos(+a+b+c)][x-\cos(-a+b+c)]\\ &\times[x-\cos(+a-b+c)][x-\cos(+a+b-c)]\\ &=\left\{\begin{aligned} &x^4-2\cos a[\cos(b+c)+\cos(b-c)]x^3\\ &+\left[\begin{aligned}&4\cos^2 a\cos(b+c)\cos(b-c)-2\\ &+2\cos^2 a+\cos^2(b+c)+\cos^2(b-c)\end{aligned}\right]x^2\\ &-2\cos a[\cos(b+c)+\cos(b-c)]\\ &\times[\cos(b+c)\cos(b-c)+\cos^2 a-1]\,x\\ &+\cos(+a+b+c)\cos(-a+b+c)\\ &\times\cos(+a-b+c)\cos(+a+b-c)\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right.$$

5. Mais, d'après une proposition de M. Catalan (*), on a

$$\begin{aligned} &\cos(+a+b+c)\cos(-a+b+c)\\ &\times\cos(+a-b+c)\cos(+a+b-c)\\ &=4\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c-(\cos a+\cos b+\cos c)(\cos a+\cos b-\cos c)\end{aligned}$$

(*) Page 456.

$$\times (\cos b + \cos c - \cos a)(\cos c + \cos a - \cos b)$$
$$= 4\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c + \cos^4 a + \cos^4 b + \cos^4 c$$
$$- 2\cos^2 a \cos^2 b - 2\cos^2 b \cos^2 c - 2\cos^2 c \cos^2 a$$
$$= + 4\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c - 4(\cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 c \cos^2 a)$$
$$+ (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c)^2.$$

6. En vertu de cette dernière identité et des identités (B), l'équation (3) devient

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & [x - \cos(+a+b+c)][x - \cos(-a+b+c)] \\ & \times [x - \cos(+a-b+c)][x - \cos(+a+b-c)] \\ = & \left\{\begin{aligned} & + x^4 - 4\cos a \cos b \cos c \,.\, x^3 \\ & + \left[\begin{aligned} & 4(\cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 c \cos^2 a) \\ & - 2(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) \end{aligned}\right] x^2 \\ & - 4\cos a \cos b \cos c(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2)\, x \\ & + 4\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c \\ & - 4(\cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 c \cos^2 a) \\ & + (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c)^2 \end{aligned}\right\}. \end{aligned}\right.$$

7. Posant tour à tour

$$x = \cos(+a+b+c), \quad x = \cos(-a+b+c),$$
$$x = \cos(+a-b+c), \quad x = \cos(+a+b-c),$$

on a quatre expressions identiquement nulles, dont la première coïncide avec ce que devient le premier membre de l'identité proposée, (A), quand on y remplace $\sin^2(a+b+c)$ par $1 - \cos^2(a+b+c)$, et qu'on ordonne suivant les puissances décroissantes de $\cos(a+b+c)$.

DESCRIPTION D'UN MOUVEMENT CONTINU DU LIEU qui fait l'objet de la Composition de Géométrie analytique au Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1863;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur de Mathématiques au lycée Saint-Louis.

L'énoncé du problème revient au suivant :

Étant donnés deux cercles sur un plan, on fait mouvoir un point mobile P *sur la circonférence du premier, on prend les polaires de ce point par rapport aux deux cercles; on demande le lieu du point de rencontre des deux polaires.*

Quand des cercles sur un plan ont un même axe radical, on sait que les polaires d'un point quelconque du plan par rapport à ces cercles concourent en un même point. C'est un cas particulier d'un théorème général concernant les coniques qui passent par quatre points réels ou imaginaires.

Qu'on prenne, au reste, pour axe des Y l'axe radical commun, l'équation générale des cercles sera, en coordonnées rectangulaires,

$$(x-a)^2+(y-b)^2-A=2\lambda x,$$

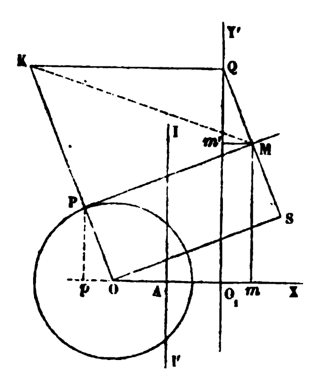
celle de la polaire du point (XY) sera

$$(x-a)(X-a)+(y-b)(Y-b)-A=\lambda(x+X).$$

Par conséquent la polaire passe par le point fixe que donnent

$$x=-X \quad \text{et} \quad -(X^2-a^2)+(y-b)(Y-b)-A=0.$$

Cela posé, soit O le centre du cercle de rayon R sur



lequel se prend le point mobile P, et soit II′ l'axe radical de ce cercle et du second cercle donné.

Si M est un point du lieu correspondant au point P, et que leurs projections sur la droite OA perpendiculaire à II′ soient m et p, on voit, d'après ce qui précède, que ces projections sont symétriques l'une de l'autre à l'égard du point A.

Donc, si on prend $AO_1 = OA$, on aura $O_1m = pO$.

Menons sur OA la perpendiculaire O_1Y', sur PM la perpendiculaire MQ, et soit Mm' une parallèle à OA.

Le triangle QMm' se trouve égal au triangle Pop, d'où il suit que

$$QM = PO = R.$$

Donc, si on prolonge QM de $MS = MQ$, la droite OS sera parallèle à PM, l'angle S sera droit.

Donc, si on fait mouvoir un angle droit S de façon que l'un des côtés indéfinis passe par le point fixe O et que l'autre côté s'appuie sur la droite O_1Y' par un point Q situé sur ce côté à une distance constante $2R$ du sommet S, le point M milieu de SQ décrira le lieu demandé.

Qu'on ait $SQ = OO_1 = 2OA$, le lieu sera, d'après Newton, une cissoïde ayant le point A pour sommet, etc.

J'ajouterai que la normale du lieu, au point M, s'obtiendra en joignant ce point au point K où se coupent la normale menée en Q sur la directrice rectiligne O_1Q et la normale menée en O sur OS.

QUESTION D'EXAMEN;

SOLUTION DE M. G. DUBOIS,
Professeur de Mathématiques.

Trouver le lieu géométrique des points tels, que le rapport de leurs distances à deux droites données AB, CD, *non situées dans un même plan, soit égal à un rapport donné* k.

Soient a la plus courte distance des deux droites données, α l'angle qu'elles font entre elles.

Prenons pour axe des z l'une des droites AB, pour axe des x la plus courte distance, et pour axe des y une perpendiculaire aux deux premiers axes.

La distance d'un point M (x, y, z) du lieu à la droite AB, prise pour axe des z, est évidemment

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

On obtiendra la distance du même point M à la droite CD, en remarquant qu'elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont, d'une part $\pm (x - a)$, et de l'autre la distance de la projection du point M sur le plan YOZ à la projection de la droite CD sur ce même plan. Or, cette dernière distance est égale à

$$y \cos\alpha - z \sin\alpha,$$

donc la distance du point M à la droite CD est égale à

$$\sqrt{(x-a)^2+(y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2}.$$

L'équation du lieu demandé est donc

$$(1) \qquad \frac{x^2+y^2}{(x-a)^2+(y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2} = k^2,$$

ou bien

$$k^2(y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2 - y^2 + (k^2-1)\left(x-\frac{ak^2}{k^2-1}\right)^2 = \frac{a^2k^2}{k^2-1}.$$

Sous cette forme, on reconnaît immédiatement que ce lieu est un hyperboloïde à une nappe, ayant pour plans diamétraux conjugués

$$y\cos\alpha - z\sin\alpha = 0, \quad y=0, \quad x=\frac{ak^2}{k^2-1},$$

c'est-à-dire le plan des zx, un plan parallèle au plan des zy, et un plan passant par la droite CD et l'axe des x.

Il en résulte que le centre de l'hyperboloïde est situé sur la plus courte distance des deux droites données AB, CD, en un point qui partage cette droite en deux segments soustractifs dont le rapport est égal au carré du rapport donné k; et que les parallèles aux deux droites données menées par ce centre sont des diamètres de cet hyperboloïde.

Dans le cas particulier où $k=1$, l'équation (1) peut s'écrire

$$(y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2 - y^2 = 2a\left(x-\frac{a}{2}\right);$$

elle représente alors un paraboloïde hyperbolique, qui passe au milieu de la plus courte distance des deux droites données, et a cette plus courte distance pour diamètre

conjugué des plans parallèles à ces deux droites, lesquelles sont parallèles à deux diamètres conjugués de toutes les sections faites par ces mêmes plans.

NOTE SUR LES ANNUITÉS;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Une personne contracte un emprunt remboursable au moyen de n annuités de a francs; on a calculé qu'il serait aussi avantageux pour elle de payer m annuités de b francs. On demande à combien on évalue le taux de l'intérêt. Le premier payement s'effectue un an après le jour de l'emprunt.

Appelons x l'intérêt annuel d'un franc; la valeur de la dette au moment où elle est contractée peut se représenter indifféremment par

$$\frac{a[(1+x)^n - 1]}{x(1+x)^n} \quad \text{ou par} \quad \frac{b[(1+x)^m - 1]}{x(1+x)^m};$$

on en conclut que

$$(a-b)(1+x)^m - a(1+x)^{m-n} + b = 0,$$

ou, en posant $y = 1 + x$,

$$(1) \qquad y^m - \frac{a}{a-b}y^{m-n} + \frac{b}{a-b} = 0.$$

Les annuités étant évidemment inégales, on peut supposer $a > b$, ce qui exige par compensation $m > n$.

L'équation (1) a pour racine l'unité, et comme d'ailleurs son premier membre présente deux variations, le nombre des racines positives est certainement deux.

La règle de Descartes permet de compter les racines négatives :

$$\begin{cases} m \text{ impair} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{une racine négative,} \\ m \text{ pair} \ldots\ldots \begin{cases} n \text{ pair} \ldots\ldots \\ n \text{ impair} \ldots \end{cases} & \begin{matrix} \text{deux racines négatives,} \\ \text{pas de racines négatives.} \end{matrix} \end{cases}$$

Les racines négatives n'ont pas d'importance dans la question proposée.

L'équation dérivée

$$(2) \qquad my^{m-1} - \frac{a}{a-b}(m-n)y^{m-n-1} = 0$$

a toujours $m-n-1$ racines nulles, une racine positive $\sqrt[n]{\frac{a(m-n)}{m(a-b)}}$, et, si n est pair, une racine négative. La racine positive de la dérivée *sépare* les deux racines positives de l'équation (1). Or, d'après la nature du problème, il faut que y ait une valeur supérieure à 1; il faut donc aussi que la racine positive de la dérivée soit supérieure à l'unité, ce qui revient à $\frac{m}{n} > \frac{a}{b}$.

La règle de Lagrange donne pour limite supérieure des racines de l'équation (1) $\sqrt[n]{\frac{a}{a-b}}$. En effet, cette quantité est plus grande que l'unité, et si on la substitue à y dans le premier membre de l'équation (1), on trouve un résultat positif $\frac{b}{a-b}$.

La valeur convenable de y étant ainsi comprise entre deux nombres connus peut s'obtenir par les méthodes ordinaires d'approximation.

Dans quelques cas particuliers elle est une fonction

explicite des données. Soit $2m = 3n$, l'équation (1) deviendra

$$y^{3(m-n)} - \frac{a}{a-b} y^{m-n} + \frac{b}{a-b} = 0;$$

le premier membre est alors divisible par $y^{m-n} - 1$, et l'on trouve

$$y = \sqrt[m-n]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{b}{a-b}}}.$$

Si $m = 2n$,

$$y^{2n} - \frac{a}{a-b} y^n + \frac{b}{a-b} = 0;$$

le premier membre est divisible par $y^n - 1$, et l'on trouve

$$y = \sqrt[n]{\frac{b}{a-b}}.$$

Si $m = 3n$,

$$y^{3n} - \frac{a}{a-b} y^n + \frac{b}{a-b} = 0;$$

le premier membre est encore divisible par $y^n - 1$, et l'on trouve

$$y = \frac{1}{\sqrt[n]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a-b}{b}}}}.$$

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE DE QUELQUES THÉORÈMES SUR LA PARABOLE;

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie.

Sur la parabole inscrite dans un angle donné, on peut démontrer les théorèmes qui suivent :

1. *La directrice passant par un point fixe, le lieu du*

foyer est le cercle circonscrit au triangle déterminé par l'angle donné et le point fixe pris pour point d'intersection des trois hauteurs.

2. Inversement, *si le lieu du foyer est un cercle passant par le sommet de l'angle donné, la directrice passe par un point fixe, intersection des trois hauteurs du triangle déterminé par l'angle donné et le cercle pris pour cercle circonscrit.*

3. *La parabole étant tangente à une troisième droite, la directrice passe par un point fixe, intersection des trois hauteurs du triangle formé par les tangentes.*

4. Il résulte des théorèmes 1 et 3 que *le lieu du foyer d'une parabole tangente à trois droites est le cercle circonscrit au triangle formé par ces droites* (théorème bien connu).

5. *L'un des points de contact de la parabole inscrite étant donné, la directrice passe par un point fixe, intersection de la perpendiculaire élevée par le sommet de l'angle, au côté dont le point de contact est connu, avec la perpendiculaire abaissée de ce point de contact sur l'autre côté.*

6. Il résulte des théorèmes 1 et 5 que *le lieu du foyer d'une parabole inscrite dans un angle, avec un point de contact donné, est le cercle circonscrit au triangle déterminé par l'angle donné et le point fixe de la directrice pris pour point d'intersection des trois hauteurs.*

7. *La direction des diamètres de la parabole inscrite étant donnée, la directrice passe par un point fixe situé à l'infini, le cercle lieu du foyer devient alors une droite passant par le sommet de l'angle et ayant, par rapport aux côtés de l'angle pris pour axes, un coefficient angulaire réciproque de celui de la direction des diamètres.*

J'indiquerai succinctement l'analyse bien simple qui fournit la démonstration de ces théorèmes. Les candidats pourront y trouver d'utiles exercices de calcul et des moyens pour résoudre plusieurs problèmes sur la construction des paraboles soumises à des conditions données.

L'équation générale, contenant deux paramètres variables, des paraboles inscrites dans un angle peut recevoir la forme

$$(1) \qquad (dy - ex)^2 + 2(dy + ex) + 1 = 0.$$

Cherchant la condition pour qu'une droite $y = mx + n$ soit tangente à la parabole (1), on trouve

$$(2) \qquad n(dm - e) + m = 0.$$

On déduit de là que l'équation de la directrice, considérée comme le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole, est

$$(3) \qquad y(e + d\cos\theta) + x(d + e\cos\theta) + \cos\theta = 0.$$

Par l'identification de cette équation avec celle de la polaire, on trouve les équations qui déterminent les coordonnées du pôle de la directrice, c'est-à-dire du foyer :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1(d + 2e\cos\theta) + x_1 e + 1 = 0, \\ y_1 d + x_1(e + 2d\cos\theta) + 1 = 0. \end{array} \right.$$

L'élimination de d et e entre les équations (3) et (4) conduit à

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y(x_1 + y_1\cos\theta) + x(y_1 + x_1\cos\theta) \\ \qquad\qquad - \cos\theta(x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1\cos\theta) = 0. \end{array} \right.$$

La directrice passant par un point donné, on voit sans difficulté que l'équation (5) en x_1, y_1 représente un

cercle passant par le sommet de l'angle et coupant les axes de manière que le triangle inscrit a pour point d'intersection des hauteurs le point donné, ce qui démontre le théorème 1.

Si on a

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta = ax_1 + by_1,$$

c'est-à-dire si le lieu du foyer est un cercle passant par le sommet de l'angle, l'équation (5) devient

$$\frac{y_1}{x_1}(x + y\cos\theta - b\cos\theta) + y + x\cos\theta - a\cos\theta = 0.$$

La directrice passe donc par un point fixe, intersection des deux droites :

$$\begin{cases} x + y\cos\theta - b\cos\theta = 0, \\ y + x\cos\theta - a\cos\theta = 0, \end{cases}$$

ce qui démontre le théorème 2, car ces équations représentent deux hauteurs du triangle inscrit.

Pour démontrer le théorème 3, soit

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

l'équation d'une troisième tangente : l'équation de condition (2) donne entre a et b la relation

$$db + ea + 1 = 0.$$

Par l'élimination de e entre cette relation et l'équation (3) de la directrice, on trouve

$$d[y(a\cos\theta - b) + x(a - b\cos\theta)] + a\cos\theta - y - x\cos\theta = 0.$$

Cette équation représente une droite passant par un point fixe, intersection des deux droites :

$$\begin{cases} y(a\cos\theta - b) + x(a - b\cos\theta) = 0, \\ a\cos\theta - y - x\cos\theta = 0. \end{cases}$$

Ces droites représentant deux hauteurs du triangle, les théorèmes 3 et 4 sont démontrés.

Les théorèmes 5 et 6 s'aperçoivent tout de suite au moyen de l'équation (3), qui ne contient plus qu'un paramètre variable quand l'un des points de contact de la parabole inscrite est donné.

Enfin le théorème 7 se démontre en posant

$$\frac{e}{d} = \text{const.} = k,$$

et en éliminant les paramètres variables des équations (4), ce qui conduit simplement à

$$y_1 = \frac{1}{k} x_1.$$

Note de M. Mathieu.

J'ai donné, dans l'article précédent, la démonstration de sept théorèmes sur la parabole; voici la démonstration non moins facile de cinq autres. Ces douze théorèmes sont susceptibles d'une foule d'applications à un grand nombre de problèmes sur la parabole, qu'ils permettent de résoudre graphiquement de la manière la plus simple.

8. *Par quatre points, formant un quadrilatère convexe, on peut faire passer deux paraboles. Les diamètres de ces paraboles sont parallèles aux côtés de l'un quelconque des trois parallélogrammes construits en prenant pour diagonales un système de droites passant par les quatre points, et pour sommets, des points conjugués harmoniquement aux sommets du quadrilatère.*

9. *Dans le triangle dérivé du quadrilatère, qui a pour sommets les points d'intersection des deux droites de chaque système, les droites qui joignent les milieux des*

côtés sont des tangentes communes aux deux paraboles.

10. Il résulte de ce qui précède que *les directrices des deux paraboles circonscrites à un quadrilatère se coupent au centre du cercle circonscrit au triangle dérivé.*

11. Il en résulte aussi que *les foyers des deux paraboles sont sur le cercle qui passe par les milieux des côtés du triangle dérivé.*

12. Enfin, *si l'on mène par les sommets du triangle que forment les tangentes communes trois droites ayant, par rapport aux côtés de ce triangle, une inclinaison réciproque de celle des diamètres de l'une des paraboles, ces trois droites iront se couper en un même point, situé sur le cercle circonscrit à ce triangle, qui est le foyer de la parabole que l'on considère.*

Je prends pour axes l'un quelconque des systèmes de droites passant par les quatre points. Représentant par p et p', q et q' les distances comprises entre l'origine et les sommets du quadrilatère, on reconnaît facilement que les deux paraboles circonscrites au quadrilatère ont pour équations

$$\frac{x^2}{pp'} \pm \frac{2xy}{\sqrt{pp'qq'}} + \frac{y^2}{qq'} - x\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\right) - y\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}\right) + 1 = 0.$$

Les coefficients angulaires des diamètres de ces deux paraboles ayant pour valeurs $\pm \frac{\sqrt{qq'}}{\sqrt{pp'}}$, le théorème 8 en résulte (*).

(*) Soit o le point de rencontre des côtés pp', qq', axes des x et des y. Prenez sur opp', oqq' les distances om, on respectivement égales à $\sqrt{op.op'}$, $\sqrt{oq.oq'}$: la médiane ol du triangle omn sera parallèle aux diamètres de l'une des deux paraboles. Cela résulte du théorème de Newton sur les segments. Car, si l'on mène à la parabole deux tangentes st, st' parallèles

Dans l'équation d'une parabole la somme des termes du premier degré et du terme indépendant représente toujours l'équation d'une droite tangente à la courbe. Mais la droite

$$x\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\right)+y\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}\right)-1=0$$

passe évidemment par les points

$$\begin{cases}\dfrac{2x}{p}+\dfrac{2y}{q}-1=0,\\[2mm] \dfrac{2x}{p'}+\dfrac{2y}{q'}-1=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{2x}{p}+\dfrac{2y}{q'}-1=0,\\[2mm] \dfrac{2x}{p'}+\dfrac{2y}{q}-1=0.\end{cases}$$

Or, il est facile de voir que ces points sont justement les points milieux des côtés du triangle dérivé, qui aboutissent à l'origine, et comme on pouvait prendre pour origine l'un quelconque des trois sommets du triangle dérivé, le théorème 9 est démontré.

Les théorèmes 10, 11 et 12 sont des conséquences immédiates de théorèmes démontrés.

à *om*, *on*, elles seront entre elles dans le rapport $\frac{om}{on}$. La corde des contacts *tt'* sera donc parallèle à *mn*, et, par conséquent, les diamètres seront parallèles à la médiane *ol*. L'équation de *ol* est $y=\frac{\sqrt{oq.oq'}}{\sqrt{op.op'}}x$. Le coefficient angulaire des diamètres est $\frac{\sqrt{oq.oq'}}{\sqrt{op.op'}}$. C'est un des résultats du calcul de M. Mathieu. G.

RECHERCHE DES AXES D'UNE CONIQUE SUR UN PLAN ET DANS L'ESPACE;

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie.

Je donne dans cet article un moyen pour trouver les axes d'une conique, sans recourir à la transformation des coordonnées.

La méthode consiste à décrire du centre de la conique un cercle de rayon ρ, à chercher l'équation des diagonales du rectangle déterminé par les points d'intersection des deux courbes, et à exprimer que les deux courbes sont tangentes, en exprimant que ces diagonales se confondent. On trouve ainsi une équation bicarrée en ρ, qui a pour racines les longueurs des demi-axes de la conique.

§ Ier. — *Conique sur un plan.*

Les axes coordonnés sont quelconques. Écrivons :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

équation de la conique; θ angle des axes coordonnés; $x'y'$ coordonnées du centre;

$$\varphi = \frac{Dy' + Ex' + 2F}{2} = \frac{\overline{AE}^2 + \overline{CD}^2 - BDE + F(B^2 - 4AC)}{B^2 - 4AC},$$

résultat de la substitution de x', y' à x, y dans l'équation.

L'origine étant transportée au centre de la conique, on a :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + \varphi = 0,$$

équation de la conique;

$$y^2 + 2xy\cos\theta + x^2 - \rho^2 = 0,$$

équation du cercle ;

$$y^2(A\rho^2 + \varphi) + xy(B\rho^2 + 2\varphi\cos\theta) + x^2(C\rho^2 + \varphi) = 0,$$

équation des diagonales, immédiatement déduite des deux équations précédentes ;

$$(B\rho^2 + 2\varphi\cos\theta)^2 - 4(A\rho^2 + \varphi)(C\rho^2 + \varphi) = 0,$$

condition de contact des deux courbes.

Cette dernière équation, ordonnée par rapport à ρ, devient

(1) $\rho^4(B^2 - 4AC) - 4\rho^2(A + C - B\cos\theta)\varphi - 4\varphi^2\sin^2\theta = 0.$

Si k représente le coefficient angulaire d'un axe, k sera la valeur du rapport $\frac{y}{x}$, tiré de l'équation des diagonales confondues ; on aura donc

$$k = -\frac{B\rho^2 + 2\varphi\cos\theta}{A\rho^2 + \varphi}.$$

L'élimination de ρ^2 entre cette relation et l'équation (1) conduit à l'équation aux coefficients angulaires des axes :

(2) $k^2(B - 2A\cos\theta) - 2k(A - C) - (B - 2C\cos\theta) = 0.$

Cercle. — La condition, pour que les carrés des demi-axes soient égaux et de même signe, sera, d'après l'équation (1),

$$(A + C - B\cos\theta)^2 + (B^2 - 4AC)\sin^2\theta = 0 ;$$

mais cette condition se transforme facilement en la suivante :

$$(A - C)^2\sin^2\theta + [B - (A + C)\cos\theta]^2 = 0,$$

laquelle entraîne

$$A = C, \quad B = 2A\cos\theta.$$

Telle est la vérification fournie par l'analyse, vérification déjà signalée par M. Gerono dans ce journal, de ce fait qu'il ne faut que trois conditions pour déterminer l'ellipse équilatère ou le cercle, tandis qu'il en faut quatre pour déterminer l'hyperbole équilatère.

Hyperbole équilatère. — La condition, pour que les carrés des demi-axes soient égaux et de signes contraires, sera, d'après l'équation (1),

$$A + C - B\cos\theta = 0.$$

Considérons les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle ayant les côtés p et q et l'angle compris θ. Il est facile de voir que l'équation générale de ces hyperboles peut recevoir la forme

$$Ay^2 + xy + Cx^2 - Aqy - Cpx = 0;$$

avec la condition

$$A + C - \cos\theta = 0.$$

On déduit bien facilement de là que toutes ces hyperboles se coupent en un point fixe, point d'intersection des hauteurs du triangle, et que le lieu des centres de ces hyperboles est un cercle.

Ces conséquences méritent d'être développées.

1. On vient de voir que les hyperboles équilatères qui passent par trois points se coupent en un quatrième point fixe : ceci implique forcément une relation de positions, entre chaque point et les trois autres, qui ne change pas avec le point que l'on considère. Les trois sommets d'un triangle et le point de concours des hauteurs forment en effet un système de quatre points jouissant de cette pro-

priété que l'un quelconque des quatre est le point de concours des hauteurs du triangle formé par les trois autres.

2. Le lieu des centres des hyperboles équilatères passant par trois points, qui est, d'après ce que nous avons dit, un cercle, se confondra avec le lieu des centres des coniques passant par quatre points placés dans les conditions énoncées.

3. On sait qu'en général le lieu des centres des coniques passant par quatre points est une ligne du second ordre passant par neuf points qui sont : les milieux des six droites qui joignent les quatre points deux à deux et les trois sommets du triangle qui dérive du quadrilatère, c'est-à-dire les trois points d'intersection des trois systèmes de droites qui passent par les quatre points.

4. Il résulte évidemment des théorèmes précédents que : les trois sommets d'un triangle et le point de concours des hauteurs forment un système de quatre points jouissant de cette propriété que les milieux des six droites qui les joignent deux à deux sont sur le cercle circonscrit au triangle dérivé du quadrilatère des quatre points; ce cercle étant le lieu des centres des hyperboles équilatères, en nombre infini, qui passent par quatre points placés dans les conditions énoncées.

5. Quatre points, donnés au hasard sur un plan, déterminent en général une hyperbole équilatère et quatre triangles. Les quatre points de concours des hauteurs de ces triangles sont sur l'hyperbole équilatère, et les quatre cercles des neuf points de ces triangles se coupent en un même point, centre de l'hyperbole.

Parabole. — Je donnerai ici le moyen de trouver le paramètre de la parabole représentée par l'équation générale.

Avant de supposer

$$B^2 - 4AC = 0,$$

faisons

$$B^2 - 4AC = 4\alpha, \quad A + C - B\cos\theta = 2\beta;$$

l'équation (1) deviendra

$$\rho^4\alpha - 2\rho^2\beta\varphi - \varphi^2\sin^2\theta = 0,$$

d'où

$$\frac{b^2}{a} = \sqrt{\frac{\varphi}{\alpha}} \cdot \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + \alpha\sin^2\theta}}{\sqrt{\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha\sin^2\theta}}}.$$

Par un calcul facile, on trouve à la limite, pour $\alpha = 0$,

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{(\overline{AE}^2 + \overline{CD}^2 - BDE)^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta}{2(A + C - B\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

§ II. — *Conique dans l'espace.*

Les axes coordonnés sont rectangulaires. Écrivons :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

équation d'une surface du second degré;

$$mx + ny + pz - 1 = 0,$$

équation du plan sécant: x', y', z', coordonnées du centre de la section; φ, $\varphi'_{x'}$, $\varphi'_{y'}$, $\varphi'_{z'}$, résultats de la substitution de x', y', z' à x, y, z dans le premier membre de l'équation et dans ses dérivées.

Les coordonnées du centre de la section sont données par le système d'équations du premier degré

$$\begin{cases} mx' + ny' + pz' - 1 = 0, \\ p\varphi'_{x'} - m\varphi'_{z'} = 0, \\ p\varphi'_{y'} - n\varphi'_{z'} = 0. \end{cases}$$

L'origine étant transportée au centre, on a

$$\begin{gathered}Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + x\varphi'_{x'} + y\varphi'_{y'} + z\varphi'_{z'} + \varphi = 0, \\ mx + ny + pz = 0,\end{gathered}$$

équations de la conique ; et

$$\begin{gathered}x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0, \\ mx + ny + pz = 0,\end{gathered}$$

équations du cercle.

On déduit de là les équations des projections des deux courbes sur le plan des xy, puis l'équation des diagonales du parallélogramme formé par les quatre points d'intersection de ces deux projections. En exprimant que les deux diagonales se confondent, on exprime que les deux projections sont tangentes et, par conséquent, que le cercle et la conique le sont aussi. On arrive de la sorte à l'équation bicarrée en ρ que voici :

$$\begin{aligned}&\rho^4[m^2(B^2 - A'A'') + n^2(B'^2 - AA'') \\ &\qquad + p^2(B''^2 - AA') + 2mn(A''B'' - BB') \\ &\qquad + 2mp(A'B' - BB'') + 2np(AB - B'B'')] \\ &- \rho^2[m^2(A' + A'') + n^2(A + A'') + p^2(A + A') \\ &\qquad - 2mnB'' - 2mpB' - 2npB]\varphi \\ &- [m^2 + n^2 + p^2]\varphi^2 = 0.\end{aligned}$$

QUESTIONS.

671. Par un point A d'une ellipse donnée, on mène deux cordes AB, AC également inclinées sur la normale en ce point : démontrer que la droite BC, qui unit les extrémités de ces cordes, passe par un point dont la position est indépendante de leur inclinaison sur la normale, et déterminer la ligne que ce point décrit lorsque le point A parcourt l'ellipse donnée. (H. D.)

672. Étant donnés deux ellipsoïdes de même centre, semblables et semblablement placés, on mène de chaque point de la surface du plus grand, des plans tangents à l'autre : démontrer que l'enveloppe des plans des lignes de contact, ainsi déterminées, est un ellipsoïde semblable aux deux premiers. (H. D.)

673. Inscrire dans une parabole un triangle *abc* semblable à un triangle donné ABC, et dont un des sommets *a* soit situé en un point donné sur la courbe.

Cas particulier où le triangle ABC est équilatéral.

674. Soient ABC un triangle dont l'angle C est droit ; γ le milieu de l'hypoténuse AB ; r le pied de la hauteur Cr ; P un point quelconque de la circonférence du cercle $Cr\gamma$ (cercle des neuf points) ; Cx la tangente à cette courbe au point C : démontrer que le produit des perpendiculaires abaissées de P sur les droites $C\gamma$, Cr est égal au produit des perpendiculaires abaissées de ce même point sur l'hypoténuse et la tangente Cx. [G. J. (Oxford.)]

675. Soient ABC un triangle isocèle dont chacun des deux angles A, B a pour mesure arc tang $2\sqrt{2}$; p, q, r les

longueurs des perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C sur une ligne droite quelconque située dans le plan du triangle : mener par un point donné une droite telle, que la somme algébrique

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{2}{r} = 0.$$

[G. J. (Oxford.)]

676. Si a et b sont les demi-axes d'une conique, r, r_1, r_2 trois demi-diamètres quelconques, démontrer que l'on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{4\sin^2\widehat{rr_1}\sin^2\widehat{r_2r}}{a^2b^2} &= \frac{2\sin^2\widehat{rr_1}\sin^2\widehat{r_1r_2}}{r^2r_2^2} + \frac{2\sin^2\widehat{r_1r_2}\sin^2\widehat{r_2r}}{r_1^2r^2} \\ &+ \frac{2\sin^2\widehat{r_2r}\sin^2\widehat{rr_1}}{r_2^2r_1^2} - \frac{\sin^4\widehat{rr_1}}{r_2^4} \\ &- \frac{\sin^4\widehat{r_1r_2}}{r^4} - \frac{\sin^4\widehat{r_2r}}{r_1^4}, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sin\widehat{rr_1}\sin\widehat{r_1r_2}\sin\widehat{r_2r} \\ &= \frac{\sin.2(\widehat{rr_1})}{2r_2^2} + \frac{\sin.2(\widehat{r_1r_2})}{2r^2} + \frac{\sin.2(\widehat{r_2r})}{2r_1^2}, \end{aligned}\right.$$

relations dans lesquelles $\widehat{rr_1}$, $\widehat{r_1r_2}$, $\widehat{r_2r}$ représentent les angles que les demi-diamètres r, r_1, r_2 font entre eux.

Conséquences de ces formules.

Ces deux dernières questions sont proposées par M. l'abbé Aoust.

LIEU DES POINTS DE RENCONTRE DES TANGENTES COMMUNES A UNE CONIQUE ET A UN CERCLE

(voir t. X, p. 408 (*), et t. XI, p. 62);

PAR MM. MISTER ET NEUBERG,
Professeurs de Mathématiques à Nivelles (Belgique).

---

1. PROBLÈME. — *Par deux points donnés sur une ellipse on fait passer une circonférence quelconque, puis on mène à ces deux courbes des tangentes communes; trouver le lieu géométrique du point de rencontre de ces tangentes.* (CHASLES.)

Le lieu reste le même lorsque la corde commune se déplace parallèlement à elle-même.

Le lieu reste encore le même, que la corde commune fasse l'angle δ, ou l'angle $180^\circ - \delta$, avec le grand axe de l'ellipse.

Rapportons l'ellipse à ses axes principaux : son équation sera

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1. \tag{1}$$

Soient

$$y + mx + n = 0,$$
$$y + m'x + n' = 0$$

les équations des deux tangentes communes, et

$$y + \alpha x + \beta = 0,$$
$$y + \alpha' x + \beta' = 0$$

(*) Tome X, page 411, on lit cette note de M. Terquem : « La solution » purement analytique présente des difficultés de calcul à cause des » quatre tangentes communes. Cette solution serait très-instructive. »

les équations des cordes de contact relatives à ces tangentes, dans le cercle variable et dans l'ellipse.

Les équations du cercle et de l'ellipse peuvent se mettre sous la forme

$$(2) \quad (y+mx+n)(y+m'x+n')+\lambda(y+\alpha x+\beta)^2=0,$$

$$(3) \quad (y+mx+n)(y+m'x+n')+\lambda'(y+\alpha' x+\beta')^2=0.$$

L'équation (2) représentant un cercle, les coefficients des carrés des variables doivent être égaux, et le rectangle des variables devra disparaître, ce qui exige que l'on ait

$$(4) \quad 1+\lambda=mm'+\lambda\alpha^2,$$

$$(5) \quad m+m'+2\lambda\alpha=0.$$

En retranchant les équations (2) et (3) membre à membre, on obtient les équations de deux droites passant par les points d'intersection du cercle et de l'ellipse; ces équations sont :

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}(y+\alpha x+\beta)=(y+\alpha' x+\beta'),$$

$$-\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}(y+\alpha x+\beta)=(y+\alpha' x+\beta').$$

Or, si l'on veut que l'une des cordes communes soit fixe, il suffira d'identifier l'une de ces deux équations avec celle de la droite passant par les deux points communs aux deux courbes, équation que nous supposons être

$$y+Mx+R=0.$$

On aura donc

$$(6) \quad \frac{\pm\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}\cdot\alpha-\alpha'}{\pm\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}-1}=M,$$

$$(7) \qquad \frac{\pm\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}\cdot\beta-\beta'}{\pm\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}-1}=\mathrm{R}.$$

Si nous appelons X et Y les coordonnées du lieu, les quantités m, m', λ', α', β' seront des fonctions de X, Y, a, b faciles à déterminer. Dès lors, les équations (4), (5), (6), (7), qui expriment toutes les conditions du problème, ne contiendront plus que trois paramètres variables, λ, α, β, et par suite, si nous éliminons α, β, λ entre ces quatre équations, nous aurons l'équation de la courbe cherchée.

Pour déterminer les valeurs de m et de m', remarquons que l'équation d'une tangente à l'ellipse peut s'écrire

$$y+mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}=0,$$

et si nous voulons déterminer les deux tangentes passant par le point (X, Y), il suffira de résoudre l'équation

$$\mathrm{Y}+m\mathrm{X}+\sqrt{a^2m^2+b^2}=0,$$

ou

$$(\mathrm{X}^2-a^2)\,m^2+2\,\mathrm{YX}\,.\,m+\mathrm{Y}^2-b^2=0,$$

par rapport à m. En conséquence, nous aurons :

$$(8) \qquad m+m'=-\frac{2\,\mathrm{YX}}{\mathrm{X}^2-a^2},$$

$$(9) \qquad mm'=\frac{\mathrm{Y}^2-b^2}{\mathrm{X}^2-a^2}.$$

De plus, l'équation de la corde de contact, relative à ces deux tangentes, étant

$$a^2\mathrm{Y}y+b^2\mathrm{X}x-a^2b^2=0,$$

on a immédiatement

$$(10) \qquad \alpha' = \frac{b^2 X}{a^2 Y},$$

$$(11) \qquad \beta' = -\frac{b^2}{Y}.$$

Comme l'équation (3) doit être identiquement la même que l'équation (1), on obtiendra la valeur de λ' en égalant à zéro le coefficient du rectangle des variables, ce qui donne

$$(12) \qquad m + m' + 2\lambda'\alpha' = 0.$$

En comparant l'équation (5) avec l'équation (12), on obtient

$$(5') \qquad \lambda\alpha = \lambda'\alpha'.$$

L'équation (6) étant rendue rationnelle devient

$$\lambda(\alpha - M)^2 = \lambda'(\alpha' - M)^2;$$

remplaçant dans cette équation λ par sa valeur $\frac{\lambda'\alpha'}{\alpha}$ tirée de (5'), nous aurons

$$\alpha\alpha'(\alpha - \alpha') = M^2(\alpha - \alpha'),$$

et, comme généralement α est différent de α', on peut poser

$$\alpha\alpha' = M^2,$$

ou

$$\alpha = \frac{M^2}{\alpha'};$$

par suite, les équations (4) et (5) deviendront

$$1 - mm' + \lambda\left(1 - \frac{M^2}{\alpha'^2}\right) = 0,$$

$$m + m' + \frac{2\lambda M^2}{\alpha'} = 0;$$

d'où, en éliminant λ,

$$(13)\qquad \frac{1 - mm'}{m + m'} = \frac{a'^2 - M^4}{2M^2 a'},$$

et en faisant usage des équations (8), (9) et (10) et posant $a^2 - b^2 = c^2$, il vient, réductions faites,

$$(14)\qquad (M^4 a^4 + M^2 a^2 b^2) y^2 - (M^2 a^2 b^2 + b^4) x^2 = - M^2 a^2 b^2 c^2,$$

équation du lieu cherché.

Remarquons que pour obtenir cette équation on ne fait nullement usage de l'équation (7), qui est la seule renfermant le paramètre R; donc le lieu est indépendant de R, et par conséquent *il reste le même lorsque la corde commune se déplace parallèlement à elle-même*. Si les deux extrémités de cette corde viennent se réunir en un seul point, la corde devient tangente et l'on retombe sur le problème proposé au concours général, année 1844. (Voir *Nouvelles Annales*, t. III, p. 425 et p. 489.)

Remarquons, en second lieu, que le coefficient M qui fixe l'inclinaison de la corde commune n'entre qu'à des puissances paires dans l'équation de la courbe; par conséquent, cette équation restera la même lorsqu'on y remplacera M par $-$M, d'où l'on conclut que *le lieu reste encore le même, que la corde commune fasse l'angle δ ou l'angle $180° - \delta$ avec le grand axe de l'ellipse.*

2. L'équation (14) du lieu peut se mettre sous une forme assez simple. A cet effet, menons une tangente à l'ellipse parallèle à la corde commune, et soient p et q les coordonnées du point de contact : on aura

$$M = \frac{b^2 p}{a^2 q},$$

et, par la substitution, l'équation (14) devient

$$b^2 p^2 (b^2 p^2 + a^2 q^2) Y^2 - a^2 q^2 (b^2 p^2 + a^2 q^2) X^2 = - p^2 q^2 a^2 b^2 c^2.$$

Mais, le point $x = p$, $y = q$, étant situé sur l'ellipse, on a

$$b^2 p^2 + a^2 q^2 = a^2 b^2,$$

et par suite l'équation (14) pourra s'écrire

$$(14') \qquad \frac{Y^2}{\frac{q^2 c^2}{b^2}} - \frac{X^2}{\frac{p^2 c^2}{a^2}} = -1.$$

Sous cette forme, on reconnaît que la courbe cherchée est une hyperbole rapportée à ses axes principaux, et ayant pour excentricité $2\sqrt{\frac{q^2 c^2}{b^2} + \frac{p^2 c^2}{a^2}} = 2c$. Elle est donc homofocale avec l'ellipse donnée. On voit d'ailleurs qu'elle passe par le point (p, q).

Si, au lieu d'une ellipse, on donnait une hyperbole, l'équation (1) serait remplacée par

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et on trouverait pour l'équation du lieu

$$\frac{Y^2}{\frac{q^2 c^2}{b^2}} + \frac{X^2}{\frac{p^2 c^2}{a^2}} = 1,$$

qui est celle d'une ellipse homofocale avec l'hyperbole donnée.

Supposons en troisième lieu que la courbe donnée soit une parabole ayant pour équation

$$(15) \qquad y^2 = 2Px.$$

Les calculs se traitent de la même manière, et l'on arrive encore à l'équation

$$(13) \qquad \frac{1 - mm'}{m + m'} = \frac{\alpha'^2 - M^4}{2M^2\alpha'}.$$

Mais comme, dans la parabole, l'équation d'une tangente est

$$y + mx + \frac{P}{2m} = 0,$$

les valeurs de m et de m' seront les racines de l'équation

$$m^2 + \frac{Y}{X} m + \frac{P}{2X} = 0,$$

et par suite

$$m + m' = -\frac{Y}{X}, \quad mm' = \frac{P}{2X}.$$

De plus, l'équation de la corde de contact étant

$$Yy - Px - PX = 0,$$

on aura

$$\alpha' = \frac{-P}{Y},$$

et, en substituant dans l'équation (13), on obtient pour l'équation du lieu :

(16) $$(2X - P)PM^2 = P^2 - M^4Y^2.$$

On voit encore que le lieu reste le même lorsque la corde commune se déplace parallèlement à elle-même, en faisant l'angle δ ou $180^\circ - \delta$ avec l'axe de la parabole.

En appelant encore p et q les coordonnées du point de contact de la tangente parallèle à la corde commune, on aura

$$M = \frac{P}{q},$$

et l'équation (16) deviendra

$$Y^2 = -\frac{2q^2}{P}X + \frac{q^4 + P^2q^2}{P^2},$$

ou

(17) $$Y^2 = -4pX + 4p^2 + q^2.$$

On trouve donc pour le lieu une parabole, rapportée à son axe principal, ayant même foyer que la proposée, et tournée dans un sens opposé. Elle passe par le point (p, q) et elle a pour paramètre $4p$, c'est-à-dire quatre fois l'abscisse du point de contact.

THÉORÈMES SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir page 426);

PAR M. HIOUX,
Répétiteur au lycée Bonaparte,
ET M. BODEMER,
Professeur au lycée de Caen.

III. Parmi les plans ABC considérés au § I, il peut y en avoir dont le pôle M s'éloigne à l'infini; les cônes circonscrits de sommet M se transforment alors en cylindres. Cherchons le lieu des directions des génératrices de ces cylindres.

Pour cela divisons l'équation (4) par γ^2, et faisons tendre $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{6}{\gamma}$ vers des limites finies, à mesure que γ tend vers l'infini.

L'équation, toutes transformations faites, devient

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{H}\,(\alpha f' x_1 + 6 f' y_1 + \gamma f' z_1)^2 \\ &-[a^2 f' x_1 (f'\alpha - 2c) + b^2 f' y_1 (f' 6 - 2c') \\ &\qquad\qquad + c^2 f' z_1 (f'\gamma - 2c'')] \\ &\times(\alpha f' x_1 + 6 f' y_1 + \gamma f' z_1) \\ &+ f_1 [a^2 (f'\alpha - 2c)^2 + b^2 (f' 6 - 2c')^2 \\ &\qquad\qquad + c^2 (f'\gamma - 2c'')^2] = 0. \end{aligned}\right.$$

Elle est homogène par rapport à α, 6, γ et représente un cône du second ordre dont le sommet est à l'origine.

Les génératrices de ce cône sont les directions des génératrices des divers cylindres circonscrits.

IV. Si l'on considère une génératrice particulière du cône précédent,

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{6}=\frac{z}{\gamma},$$

l'équation (10) représente le lieu des points P, ce qui donne un théorème analogue au théorème II.

La surface du second ordre, lieu des points P, définie par l'équation (10); coupe la surface S suivant deux courbes situées dans les plans

$$\alpha f' x_1 + 6f' y_1 + \gamma f' z_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} &H(\alpha f' x_1 + 6f' y_1 + \gamma f' z_1) \\ &- [a^2 f' x_1 (f'\alpha - 2c) + b^2 f' y_1 (f' 6 - 2c') \\ &\qquad + c^2 f' z_1 (f'\gamma - 2c'')] = 0. \end{aligned}$$

Le premier est le plan diamétral de la surface S, conjugué de la direction

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{6}=\frac{z}{\gamma}.$$

Le second passe par une droite DE, intersection des deux plans

$$\alpha f' x_1 + 6f' y_1 + \gamma f' z_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} &a^2 f' x_1 (f'\alpha - 2c) + b^2 f' y_1 (f' 6 - 2c') \\ &\qquad + c^2 f' z_1 (f'\gamma - 2c'') = 0. \end{aligned}$$

Ce dernier plan est conjugué de la droite

$$\frac{x}{a^2(f'\alpha - 2c)} = \frac{y}{b^2(f' 6 - 2c')} = \frac{z}{c^2(f'\gamma - 2c'')},$$

par rapport à la surface S.

Cette droite elle-même est conjuguée du plan

$$\alpha f' x_1 + 6f' y_1 + \gamma f' z_1 = 0,$$

par rapport à l'ellipsoïde E, ce que l'on voit en écrivant l'équation de ce plan sous la forme

$$x_1(f'\alpha - 2c) + y_1(f'\beta - 2c') + z_1(f'\gamma - 2c'')$$
$$+ 2c\alpha + 2c'\beta + 2c''\gamma = 0.$$

Remarquons encore que le plan qui contient cette dernière droite et la génératrice particulière considérée, est conjugué de la droite DE par rapport à la surface S.

V. Quand le point fixe P est sur la surface S, le lieu S' se réduit à deux plans.

Dans ce cas, en effet, $f_1 = 0$, et l'équation (4) se décompose en

(11) $$V_1 = 0,$$

(12) $$HV_1 - (a^2f'x_1 f'\alpha + b^2f'y_1 f'\beta + c^2f'z_1 f'\gamma) = 0.$$

L'équation (11),

$$x_1 f'\alpha + y_1 f'\beta + z_1 f'\gamma + 2c\alpha + 2c'\beta + 2c''\gamma + 2 = 0,$$

peut s'écrire

$$\alpha f'x_1 + \beta f'y_1 + \gamma f'z_1 + 2cx_1 + 2c'y_1 + 2c''z_1 + 2 = 0;$$

elle représente le plan tangent à la surface S au point P:

C'est le lieu des pôles de ceux des plans ABC *qui contiennent le point* P.

Quant à l'équation (12), elle représente un plan passant par une droite DE définie par les équations

(11) $$V_1 = 0,$$

(13) $$a^2f'x_1 f'\alpha + b^2f'y_1 f'\beta + c^2f'z_1 f'\gamma = 0.$$

La polaire réciproque du corollaire I se réduit à deux points : l'un est le point P lui-même ; l'autre, que nous appellerons I, est le point de rencontre de ceux des plans ABC dont le pôle appartient au plan (12).

L'équation (12), mise sous la forme

$$\left(x_1 - \frac{a^2 f' x_1}{H}\right) f'\alpha + \left(y_1 - \frac{b^2 f' y_1}{H}\right) f'\beta + \left(z_1 + \frac{c^2 f' z_1}{H}\right) f'\gamma$$
$$+ 2c\alpha + 2c'\beta + 2c''\gamma + 2 = 0,$$

fait voir que les coordonnées x', y', z' du point I ont pour valeurs

$$x' = x_1 - \frac{a^2 f' x_1}{H}, \quad y' = y_1 - \frac{b^2 f' y_1}{H}, \quad z' = z_1 - \frac{c^2 f' z_1}{H}.$$

La droite PI a, par suite, pour équations

$$\frac{x - x_1}{a^2 f' x_1} = \frac{y - y_1}{b^2 f' y_1} = \frac{z - z_1}{c^2 f' z_1}.$$

Cette droite est la polaire réciproque de DE par rapport à la surface S. Elle est conjuguée du plan (13) par rapport à cette même surface, et du plan (11) par rapport à l'ellipsoïde E. Donc :

Si d'un point P *d'une surface du second ordre* S, *on mène trois droites* PA, PB, PC, *etc., le plan* ABC *coupe en un point fixe* I *la droite menée de* P *qui a ses deux conjuguées tangentes à la surface* S *en ce point.*

Quand on prend pour surface à centre une sphère, la droite PI devient la normale à la surface S au point P. Donc :

Si d'un point P *d'une surface du second ordre, on mène trois droites rectangulaires qui percent la surface aux trois points* A, B, C, *le plan* ABC *coupe en un point fixe la normale à la surface au point* P (*).

VI. Quand le point P est sur la surface S, l'équation

(*) *Voir*, pour ce cas particulier, les *Nouvelles Annales*, cahier de septembre 1862.

du cône (10) considéré au § III se décompose en

$$\alpha f' x_1 + \beta f' y_1 + \gamma f' z_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} & H(\alpha f' x_1 + \beta f' y_1 + \gamma f' z_1) \\ & - [a^2 f' x_1 (f' \alpha - 2c) + b^2 f' y_1 (f' \beta - 2c') \\ & \qquad + c^2 f' z_1 (f' \gamma - 2c'')] = 0; \end{aligned}$$

ce cône est donc alors l'ensemble de deux plans respectivement parallèles aux plans (11) et (12) du paragraphe précédent, et il y a lieu de considérer deux séries de cylindres circonscrits.

Les premiers ont pour plan tangent commun le plan (11), tangent en P à la surface S; les plans des courbes de contact passent par une même droite PK, conjuguée du plan (11) par rapport à la surface S.

Les seconds admettent pour plan tangent commun un plan parallèle au plan (12) et tangent à la surface S en un point H; les plans des courbes de contact passent par une même droite HL, conjuguée du plan (12) par rapport à la surface S. Ces plans passent d'ailleurs par le point I, pôle du plan (12), car on sait que ce point I est situé sur HL.

Il est clair que les trois droites PI, PK, HL sont situées dans le plan diamétral de la surface S, conjugué de l'intersection DE des plans (11) et (12).

VII. Quand le point P décrit la surface S, le point I décrit une surface du second ordre Σ.

Les coordonnées x, y, z du point I sont données en fonction des coordonnées x_1, y_1, z_1 du point P par les équations

$$(14)\quad x = x_1 - \frac{a^2 f' x_1}{H}, \quad y = y_1 - \frac{b^2 f' y_1}{H}, \quad z = z_1 - \frac{c^2 f' z_1}{H}.$$

On obtiendra l'équation du lieu Σ en éliminant x_1, y_1,

z_1 entre ces équations et l'équation $f_1 = 0$ de la surface S.

On tire de l'équation (14), pour x_1, y_1, z_1, des valeurs de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= ax + by + cz + d, \\ y_1 &= a'x + b'y + c'z + d', \\ z_1 &= a''x + b''y + c''z + d''. \end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans $f_1 = 0$ et nous aurons une équation du second degré en x, y, z qui sera l'équation de la surface Σ.

Cette équation est

$$\begin{aligned} Ax_1^2 + A'y_1^2 + A''z_1^2 + 2By_1z_1 + 2B'x_1z_1 + 2B''x_1y_1 \\ + 2Cx_1 + 2C'y_1 + 2C''z_1 + 1 = 0, \end{aligned}$$

en y considérant x_1, y_1, z_1 comme tenant lieu des valeurs ci-dessus.

Pour reconnaître la nature de cette surface, prenons pour plans coordonnés des $x'y'$, des $x'z'$, des $y'z'$ les plans

$$z_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_1 = 0.$$

Soit γ l'angle que la perpendiculaire MP, abaissée d'un point quelconque M de Σ sur le plan $z_1 = 0$, fait avec l'axe des z'. En égalant les deux expressions de la longueur de cette perpendiculaire, on a

$$z' \cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{a''^2 + b''^2 + c''^2}},$$

d'où, en posant

$$k = \cos\gamma \sqrt{a''^2 + b''^2 + c''^2},$$

on tire

$$z_1 = kz'.$$

On trouverait d'une manière analogue

$$y_1 = hy', \quad x_1 = gx'.$$

L'équation de la surface Σ rapportée aux nouveaux plans coordonnés est donc

$$A(gx')^2 + A'(hy')^2 + A''(kz')^2 + \ldots + 1 = 0.$$

Si l'on fait maintenant

$$gx' = X', \quad hy' = Y', \quad kz' = Z',$$

c'est-à-dire si l'on diminue les coordonnées de cette surface dans les rapports $\frac{1}{g}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{k}$, on obtiendra une nouvelle surface, de même nature que Σ, représentée par l'équation

$$AX'^2 + A'Y'^2 + A''Z'^2 + \ldots + 1 = 0.$$

Inclinons d'un autre côté les coordonnées de la surface S dans les directions des nouveaux axes, nous formerons une autre surface de même nature que S, et il est clair qu'en la transportant parallèlement à elle-même on pourra la faire coïncider avec la surface précédente.

On en conclut que les surfaces Σ et S sont deux surfaces de même nature. (*Fin.*)

QUESTIONS 658, 659, 660 ET 661 (PROPOSÉES PAR M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE);

Solutions de M. ROUQUEL,
Licencié ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

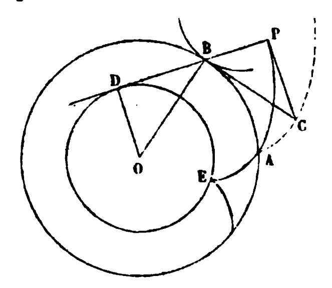
Question 658.

La développante d'un cercle est la route que suit le

pôle d'une spirale logarithmique roulant sur un autre cercle.

Faisons rouler une spirale logarithmique sur un cercle de rayon arbitraire OB, et proposons-nous de déterminer la courbe décrite par le pôle P.

Soient B le point de contact des deux courbes, P la



position correspondante du pôle, BC la tangente commune. Tirons OD perpendiculaire à PB prolongée. D'après une propriété connue de la spirale, l'angle $\widehat{DBC}$ est constant. Il en sera donc de même de l'angle $\widehat{OBD}$, et par suite de la distance OD.

D'un autre côté, BP est normale à la trajectoire du point P, et l'on vient de voir que cette ligne, BP, se trouve à une distance constante du point O, c'est-à-dire qu'elle est constamment tangente au cercle décrit du point O comme centre avec OD pour rayon. La route du point P est donc la développante du cercle OD.

Remarque I. — Soit

$$r = ae^{m\theta}$$

l'équation polaire de la spirale; on trouvera aisément, pour le rapport des rayons des deux cercles :

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OB}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Remarque II. — Si la spirale roule à l'extérieur du cercle OB, le pôle engendrera la portion de développante du cercle OD extérieure au premier cercle. Pour avoir la position initiale A du point P, il faut observer que l'arc BA doit être égal à la longueur de l'arc de spirale compris entre le point B et le pôle, c'est-à-dire à la portion de tangente BC limitée en C par une perpendiculaire menée par le point P au rayon vecteur.

Le point de départ étant toujours en A, si l'on fait rouler la spirale dans l'intérieur du cercle OB et dans le sens AB, le point P engendrera la partie restante de la développante du cercle OD. Lorsque le pôle sera parvenu en E sur le cercle OD, le rayon de courbure de la spirale correspondant au point de contact égalera le rayon du cercle OB : les deux courbes, ayant un contact du second ordre, se traverseront. Le mouvement continuant, il est clair que le cercle OB sera intérieur à la portion de spirale qui doit rouler sur lui. En E, la courbe décrite par le pôle offrira un point de rebroussement, et l'on obtiendra une développante symétrique de la première, ou, pour mieux dire, l'autre branche de la développante.

Remarque III. — Relativement à la partie mobile du plan, le lieu du point C est une spirale égale à la première, et dont celle-ci est la développée. Dans l'espace fixe, le point C décrit la développante du cercle OB. On voit tout de suite que la deuxième spirale et la développante AC ont en C un contact du deuxième ordre, ce qui conduit à ce théorème :

Quand une spirale logarithmique roule sur un cercle, l'enveloppe d'une deuxième spirale, dont la première serait la développée, est la développante du même cercle, l'ordre du contact de l'enveloppe et de l'enveloppée étant toujours le second.

Question 659.

La caustique par réflexion de la développante d'un cercle, pour les rayons émanés du centre, est une développée de la spirale d'Archimède.

La spirale d'Archimède jouit de cette propriété bien connue, que la normale en un point de cette courbe fait avec le rayon vecteur aboutissant en ce point un angle dont la cotangente est égale à l'angle formé par ce rayon et l'*axe polaire*.

Cela posé, je considère l'un des rayons lumineux qui, partant du centre O d'un cercle OA, vont se réfléchir sur la développante AM de ce cercle. Soient OM le rayon incident dont je désignerai par ρ la longueur comprise entre le centre et le point d'incidence M; MB la normale à la développante, touchant en B le cercle OA; MC le rayon réfléchi.

Par le point O, je tire ON parallèle à BM, rencontrant en N, MC prolongée. En outre, je mène OX perpendiculaire à OA, choisissant le sens OX de manière que l'arc AX vaille 270 degrés.

Je me propose de démontrer que le lieu des points N est une spirale d'Archimède ayant pour équation

$$r = 2a\theta,$$

a désignant le rayon du cercle et OX étant l'axe polaire.

En effet, on a

$$\mathrm{ON} = 2\,\mathrm{MB} = 2\sqrt{\rho^2 - a^2},$$

$$\widehat{\mathrm{NOX}} = \widehat{\mathrm{BOA}} = \frac{\text{arc AB}}{a} = \frac{\mathrm{BM}}{a} = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a}.$$

Les coordonnées polaires du point N satisfont à l'é-

quation de la courbe, comme il est facile de s'en assurer.

De plus, la normale en N à cette spirale forme avec le rayon vecteur ON un angle μ tel, que

$$\cot\mu = \widehat{XON} = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a};$$

mais

$$\cot\widehat{ONC} = \cot\widehat{OMB} = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a};$$

par suite

$$\mu = \widehat{ONC},$$

NC est normale en N à la spirale considérée, et la caustique demandée n'est autre que la développée de cette spirale.

Question 660.

La courbe réciproque de la développante d'un cercle, pour des rayons émanés du centre, est une spirale tractricè. (On appelle ainsi la courbe qui, en coordonnées polaires, a une tangente constante.)

Soient M un point appartenant à la développante AMM′ d'un cercle OA; MB la normale à la développante, touchant en B le cercle OA; m le pied de la perpendiculaire abaissée du point B sur OM. On propose de déterminer le lieu du point m.

Considérons sur la développante un point M′ infiniment voisin de M; soit m' le point qui lui correspond sur la courbe réciproque. Posons

$$\left.\begin{array}{ll} OM = R, & om = r, \\ OM' = R + dR, & om' = r + dr, \\ MM' = dS, & mm' = ds, \end{array}\right\} \quad a = \text{rayon du cercle.}$$

L'équation différentielle de la développante est

(1) $$R\,dR = a\,dS.$$

Le triangle rectangle MOB donne

$$(2) \qquad Rr = a^2,$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad R\,dr + r\,dR = 0.$$

Les deux triangles Omm', OMM' étant semblables, il vient

$$(4) \qquad \frac{dS}{R} = \frac{ds}{r}.$$

Entre les équations (1), (2), (3), (4), éliminant R, dR, dS, on obtient, pour l'équation différentielle de la courbe demandée,

$$(5) \qquad r\,ds + a\,dr = 0,$$

d'où

$$r\frac{ds}{dr} = -a.$$

Cette dernière égalité démontre la propriété énoncée, en remarquant que $r\dfrac{ds}{dr}$ représente, en coordonnées polaires, la longueur de la tangente.

Note sur la spirale tractrice.

La longueur de la tangente étant négative, il s'ensuit que l'angle formé par la partie positive de la tangente avec le rayon vecteur est obtus. Cela résulte, au reste, de ce que les lignes MM', mm' sont antiparallèles relativement à OM, et de ce que l'angle $OM'M$ est toujours aigu.

La valeur maximum du rayon vecteur est a; si l'on compte les arcs à partir du point A où le rayon r acquiert

cette valeur, on trouve aisément

$$s = a \times \mathrm{L}\left(\frac{a}{r}\right) = -a \times \mathrm{L}(\sin\alpha),$$

α étant l'angle formé par le rayon vecteur et la normale. puisque cet angle est fourni par l'équation

$$\sin\alpha = \frac{r}{a}.$$

De l'équation différentielle

$$rds + adr = 0,$$

on peut déduire la valeur du rayon de courbure ρ :

$$\rho = \frac{r\cos\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Cette formule fournit une construction très-simple du centre de courbure.

La courbe offre un point d'inflexion, pour la valeur $\cos 2\alpha = 0$, qui correspond à $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

On pourrait trouver l'équation finie entre r et θ, en intégrant l'équation (5), mais on peut y parvenir plus simplement de la manière suivante :

L'axe polaire étant OA, l'équation de la développante est

$$\theta = \pm\left(\frac{1}{a}\sqrt{\mathrm{R}^2 - a^2} - \operatorname{arc}\cos\frac{a}{\mathrm{R}}\right).$$

θ étant le même, on a

$$\mathrm{R}r = a^2, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{R} = \frac{a^2}{r};$$

remplaçant R par cette valeur, il vient, pour l'équation

polaire de la tractrice,

$$\theta = \pm \left(\frac{1}{r} \sqrt{a^2 - r^2} - \text{arc cos} \frac{r}{a} \right).$$

La spirale se compose de deux branches symétriques par rapport à OA, ayant leur point de départ en A où elles admettent OA pour tangente commune, et se rapprochant indéfiniment du centre, qui est un point asymptotique. Les points d'inflexion correspondent aux valeurs

$$\theta = \pm \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

Question 661.

La spirale tractrice est la trajectoire que suit le pôle d'une spirale hyperbolique roulant sur elle-même en partant de la coïncidence des deux pôles.

Pour se trouver dans les conditions de l'énoncé, il faut imaginer que l'une des branches d'une spirale hyperbolique roule sur l'autre, en partant du pôle, où ces deux branches admettent pour tangente commune une perpendiculaire à l'axe polaire.

Soient P le pôle fixe, A le point de contact des deux courbes correspondant à la position M du pôle mobile; AN la tangente commune évidemment perpendiculaire à PM en son milieu.

La ligne MA est normale à la trajectoire du point M.

Je mène MT perpendiculaire à AM, rencontrant en N la tangente commune, et en T la perpendiculaire PT au rayon vecteur PM.

MT est la longueur de la tangente à la courbe décrite par le point M, et MN représente la sous-tangente de la spirale hyperbolique.

D'après une propriété connue de la spirale hyperbo-

lique, MN est constante; il en sera donc de même de MT, puisque MT = 2MN.

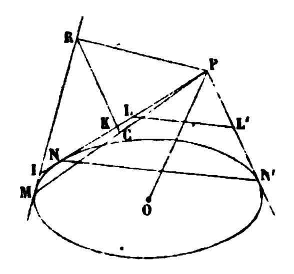
Le lieu du point M est, par suite, une spirale tractrice (*).

QUESTION 650;

SOLUTION DE M. A. P.,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis
(division de M. Amiot).

ÉNONCÉ. — *On donne un point* P *dans le plan d'une conique; on sait que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur toutes les tangentes à la conique a un point double en* P. *Démontrer que les centres de courbure de cette courbe correspondant à ce point double sont à égale distance du diamètre qui contient le point* P.

Soient PN et PN′ les tangentes menées par le point P à la conique. Par un point M de la courbe, voisin de N,



je mène la tangente MR, sur laquelle j'abaisse du point P une perpendiculaire PR; le point R est un point du lieu; on sait que le cercle décrit sur MP comme diamètre passe

---

(*) MM. Laquière, Paul Mansion de Marchin et Nicolaïdès ont résolu les mêmes questions; nous ferons prochainement connaître leurs solutions.

par le point R et a même tangente en ce point que le lieu considéré. Il a donc aussi même normale CR, C étant le milieu de PM. Si le point M se rapproche indéfiniment du point N, le point R tend vers le point P, et la normale CR tend vers la tangente PN, limite de la sécante PM et de la tangente MR. La droite PN est donc la normale au lieu, au point P. Comme le point P est un point double, la seconde tangente PN′ à la conique est la seconde normale au lieu, au point P. Les deux centres de courbure correspondant au point P se trouvent donc sur les droites PN et PN′.

Soit I le point de rencontre des tangentes MR, PN à la conique. Dans le triangle PIM, la transversale CR passant par le milieu du côté PM, on a

$$\frac{PK}{KI} = \frac{RM}{RI},$$

d'où l'on déduit

$$\text{lim. de } \frac{PK}{KI} = \text{lim. de } \frac{RM}{RI}.$$

Or, les deux termes du dernier rapport RM et RI tendent vers PN, lorsque R se rapproche de P ; donc les deux longueurs PK et KI tendent vers PL moitié de PN, c'est-à-dire que le point de rencontre K de deux normales infiniment voisines PN, RC tend vers le point L qui est par suite l'un des centres de courbure correspondant au point P. Par la même raison, le point L′, situé au milieu de PN′, est le centre de courbure situé sur la seconde normale PN′ du point P. Mais le diamètre OP de la conique passe par le sommet P du triangle PNN′ et par le milieu de la base NN′; il divise donc en deux parties égales la droite LL′ parallèle à la base NN′, et les points L et L′ se trouvent donc également distants du diamètre OP

C. Q. F. D.

THÉORÈMES DE M. PAUL SERRET

(voir 2e série, t. Ier, p. 324).

Démonstration du théorème V (*);

PAR M. A. MOGNI,
Professeur de Mathématiques (Tortone).

ÉNONCÉ. — *Soient une spirale logarithmique, une corde mobile vue de l'origine sous un angle constant, et le pôle de cette corde par rapport à la spirale, ou le point de concours des tangentes à la courbe menées par les extrémités de la corde : l'enveloppe de la corde mobile et la ligne décrite par le pôle sont deux spirales logarithmiques. Le sommet d'un angle constant circonscrit à une spirale logarithmique décrit de même une spirale.*

1. Soient (ρ_0, θ_0), (ρ_1, θ_1) les coordonnées polaires des points M, N d'une spirale logarithmique dont l'équation est

$$\rho = ae^{m\theta};$$

l'équation en coordonnées polaires d'une droite passant par M et N est donnée par

$$\text{(A)} \qquad \rho = \frac{\rho_0 \rho_1 \sin(\theta_1 - \theta_0)}{\rho_0 \sin(\theta - \theta_0) - \rho_1 \sin(\theta - \theta_1)},$$

et observant que l'on a

$$\rho_0 = ae^{m\theta_0}, \quad \rho_1 = ae^{m\theta_1},$$

(*) Ce théorème n'est pas compris au nombre de ceux qui ont été démontrés par M. Nicolaïdès (2e série, t. Ier, p. 464).

l'équation (A) devient

$$(B)\qquad \rho = \frac{ae^{m(\theta_1+\theta_0)}\sin(\theta_1-\theta_0)}{e^{m\theta_0}\sin(\theta-\theta_0)-e^{m\theta}\sin(\theta-\theta_1)}.$$

Maintenant, si l'on veut que la corde MN soit vue de l'origine O sous un angle constant k, il faut poser

$$\theta_1-\theta_0=k.$$

Avec cette relation, éliminant θ_1 de l'équation (B), on a

$$(C)\qquad \rho = \frac{ae^{m(\theta_0+k)}\sin k}{\sin(\theta-\theta_0)-e^{mk}\sin(\theta-\theta_0-k)}.$$

Prenant la dérivée de l'équation (C) par rapport à θ_0 et égalant cette dérivée à zéro, on a, après quelques développements et réductions faciles,

$$m\sin(\theta-\theta_0)-me^{mk}\cos k\sin(\theta-\theta_0)$$
$$+me^{mk}\sin k\cos(\theta-\theta_0)+\cos(\theta-\theta_0)-e^{mk}\cos k\cos(\theta-\theta_0)$$
$$-e^{mk}\sin k\sin(\theta-\theta_0)=0,$$

d'où

$$\operatorname{tang}(\theta-\theta_0)=\frac{e^{mk}\cos k-me^{mk}\sin k-1}{m-e^{mk}\sin k-me^{mk}\cos k}.$$

Pour tang $(\theta-\theta_1)$, on aurait obtenu

$$\operatorname{tang}(\theta-\theta_1)=\frac{e^{-mk}\cos k+me^{-mk}\sin k-1}{m+e^{-mk}\sin k+me^{-mk}\cos k}.$$

Les valeurs de $\theta-\theta_0$, $\theta-\theta_1$ étant constantes, je pose

$$\theta-\theta_0=\alpha,\quad \theta-\theta_1=\beta.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (B), on a pour l'équation de l'enveloppe de la corde mobile MN

$$\rho=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{e^{m\beta}\sin\alpha-e^{m\alpha}\sin\beta}e^{m\theta},$$

équation d'une spirale logarithmique semblable à la première, semblablement placée, le rapport de similitude étant $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{e^{m\beta}\sin\alpha - e^{m\alpha}\sin\beta}$.

2. Menons par le point M une tangente à la spirale logarithmique dont l'équation est toujours $\rho = ae^{m\theta}$. Observant que dans cette courbe la tangente est toujours également inclinée sur le rayon vecteur du point de contact, et que la tangente de cette inclinaison est donnée par $\frac{1}{m}$, on a, pour l'équation de la tangente au point M dont les coordonnées sont ρ_0, θ_0,

$$\rho = \frac{\rho_0}{m\sin(\theta - \theta_0) + \cos(\theta - \theta_0)},$$

d'où

$$(\mathrm{D}) \qquad \rho = \frac{ae^{m\theta_0}}{m\sin(\theta - \theta_0) + \cos(\theta - \theta_0)},$$

et, pour l'équation de la tangente au point N dont les coordonnées sont ρ_1, θ_1,

$$(\mathrm{E}) \qquad \rho = \frac{ae^{m\theta_1}}{m\sin(\theta - \theta_1) + \cos(\theta - \theta_1)}.$$

On obtiendra la ligne décrite par le pôle de la corde MN, vue de l'origine sous un angle constant k, en éliminant θ_0, θ_1 entre les équations (D), (E) et la relation

$$\theta_1 - \theta_0 = k.$$

Si l'on divise membre à membre l'équation (E) par l'équation (D), on obtient

$$ae^{mk}[m\sin(\theta - \theta_0) + \cos(\theta - \theta_0)] = m\sin(\theta - \theta_1) + \cos(\theta - \theta_1)$$

et aussi

$$ae^{mk}[m\sin(\theta - \theta_0) + \cos(\theta - \theta_0)]$$
$$= m\sin(\theta - \theta_0 - k) + \cos(\theta - \theta_0 - k).$$

Développant et réduisant, on trouve

$$\operatorname{tang}(\theta - \theta_0) = \frac{ae^{mk} + m \sin k - \cos k}{\sin k + m \cos k - mae^{mk}}.$$

Pour tang $(\theta - \theta_1)$, on aurait trouvé

$$\operatorname{tang}(\theta - \theta_1) = \frac{mae^{mk} \sin k + ae^{mk} \cos k - 1}{ae^{mk} \sin k - mae^{mk} \cos k + m}.$$

Comme dans le cas précédent, on obtient des valeurs constantes pour $\theta - \theta_0$, $\theta - \theta_1$. Posant donc

$$\theta - \theta_0 = \alpha_1,$$

et substituant dans l'équation (D), on obtient pour l'équation du lieu cherché

$$\rho = \frac{a}{me^{m\alpha_1} \sin \alpha_1 + e^{m\alpha_1} \cos \alpha_1} e^{m\theta},$$

équation d'une spirale logarithmique semblable à la proposée.

3. Soient T le point de concours des tangentes aux points M et N, O l'origine. Dans le quadrilatère OMNT les angles en M et N sont constants par une propriété de la courbe. Donc, si l'angle T est constant, il en est de même de l'angle NOM. Donc le sommet d'un angle constant circonscrit à une spirale logarithmique décrit une spirale de la même espèce.

4. L'angle formé par les tangentes en M et N étant constant, si l'on mène par les mêmes points des normales à la courbe, l'angle des normales sera constant.

Le lieu décrit par le point de concours des normales est une spirale logarithmique semblable à la première.

Les équations des normales aux points M et N sont

données par

$$\rho = \frac{mae^{m\theta_0}}{\sin(\theta - \theta_0) + m\cos(\theta - \theta_0)},$$

$$\rho = \frac{mae^{m\theta_1}}{\sin(\theta - \theta_1) + m\cos(\theta - \theta_1)}.$$

Le calcul s'achève comme dans le cas des tangentes.

5. Il est évident que le point de concours des normales se trouve sur une même circonférence avec l'origine O, le point de concours des tangentes, le point M et le point N. On peut démontrer que le centre de cette circonférence décrit une spirale logarithmique lorsqu'on fait mouvoir la corde MN vue de l'origine sous un angle constant.

On détermine le centre par le point de concours de deux perpendiculaires menées aux milieux des rayons vecteurs OM, ON. Les équations des perpendiculaires sont

$$\rho = \frac{\rho_0}{2\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{ae^{m\theta_0}}{2\cos(\theta - \theta_0)},$$

$$\rho = \frac{\rho_1}{2\cos(\theta - \theta_1)} = \frac{ae^{m\theta_1}}{2\cos(\theta - \theta_1)}.$$

Le calcul s'achève comme dans le cas des tangentes.

Si l'on cherche l'enveloppe de cette circonférence, on trouve de même une spirale logarithmique.

NOTE

Sur les coefficients du développement de $\left(\frac{x^p-1}{x-1}\right)^n$;

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie.

J'ai lu, t. XX, p. 397 des *Nouvelles Annales*, un théorème qui est inexact.

L'énoncé porte que si l'on additionne de q en q les coefficients du développement de $(1+x+x^2+\ldots+x^{p-1})^n$ (q ne dépassant pas p), les sommes, en nombre q, que l'on peut ainsi former ne sont susceptibles de prendre que les trois valeurs $\frac{(p-1)^n}{q}$, $\frac{(p-1)^n}{q}\pm 1$.

La formule que j'indiquerai à la fin de cette Note expliquera assez comment ce théorème peut se vérifier dans certains cas sans être général. Voici un exemple où il tombe en défaut :

Les coefficients du développement de $(1+x+\ldots+x^{10})^2$ forment la suite

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;$$

si l'on additionne de 7 en 7, les sept sommes présenteront quatre résultats différents : 16, 17, 18 et 19.

Mais mon intention en publiant cette Note est bien moins de rectifier une erreur qu'a sans doute déjà reconnue un ancien camarade et ami que de me joindre à lui pour appeler l'attention des savants collaborateurs de ce recueil sur les nombres qui forment les coefficients du développement de $\left(\frac{x^p-1}{x-1}\right)^n$, nombres qui me paraissent jouir de propriétés arithmologiques assez curieuses.

Une étude ébauchée de ces coefficients m'a conduit à quelques formules qui mériteront peut-être un examen, et parmi lesquelles je ne citerai, pour le moment, que celle relative à la sommation des termes de q en q.

Soit $p = q + r$, r pouvant être par conséquent le reste de la division de p par q; soit Σ_q une somme de termes pris de q en q dans le développement de $\left(\frac{x^p - 1}{x - 1}\right)^n$, et σ_q la somme analogue dans $\left(\frac{x^r - 1}{x - 1}\right)^n$, les termes qui servent de points de départ aux sommations occupant, dans les deux suites, le même rang qui ne peut évidemment dépasser q :

On a toujours

$$\Sigma_q - \sigma_q = \frac{p^n - r^n}{q}.$$

SUR LES DIFFÉRENTES SOLUTIONS DE LA QUESTION 654;

PAR M. S. REALIS.

Extrait d'une Lettre à M. Prouhet.

Dans la note (p. 307) qui suit la solution générale, donnée par M. E Beltrami, de la question 654 (p. 191) vous demandez : « Pourquoi les méthodes employées » (p. 285 et 286) n'ont-elles conduit qu'à une solution » particulière? » Voici ce que j'avais remarqué à ce sujet, même avant la publication de l'excellent article de M. Beltrami.

Soit une fonction $\varphi(\omega)$ satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad \varphi(\omega) = \varphi(0)\frac{\sin\omega}{\omega};$$

on aura aussi

$$\varphi(2\omega)=\varphi(0)\,\frac{\sin 2\omega}{2\omega}=\varphi(0)\,\frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}.$$

Substituant dans cette formule pour $\varphi(0)$ la valeur $\frac{\omega\varphi(\omega)}{\sin\omega}$, déduite de la première, on obtient

$$(2)\qquad \varphi(2\omega)=\varphi(\omega)\cos\omega.$$

La formule (2) est donc une conséquence immédiate de la formule (1), et elle est plus générale que celle-ci, ainsi qu'il résulte des développements fournis par M. Beltrami, en ce qu'elle est indépendante de la valeur particulière que prend la fonction φ quand on y fait $\omega=0$.

Maintenant, si l'on considère les solutions données aux pages 285 et 286, on verra qu'elles ne prouvent autre chose sinon que la formule (1) satisfait à la condition exprimée par la formule (2).

Dans la première de ces solutions, par un habile emploi d'une formule d'Euler, on passe d'une manière très-élégante de l'équation (2) à l'équation (1); mais en cherchant à vérifier le résultat *à posteriori*, sans l'introduction du produit des cosinus auxiliaires, on reconnaît que la solution revient à celle ci-dessus, c'est-à-dire à faire voir qu'en multipliant entre elles les équations (1) et (2) on retombe sur l'équation (1) :

$$\varphi(\omega).\varphi(2\omega)=\varphi(0)\,\frac{\sin\omega}{\omega}\cdot\varphi(\omega)\cos\omega,$$

$$\varphi(2\omega)=\varphi(0)\,\frac{\sin 2\omega}{2\omega},$$

$$\varphi(\omega)=\varphi(0)\,\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

La seconde solution s'applique de même parfaitement à la question inverse de l'énoncé 654, c'est-à-dire à la dé-

monstration de la formule (2) au moyen de la formule (1). Cela doit être, puisque la fonction $\varphi(o)\frac{\sin\omega}{\omega}$ est développable en une série à puissances ascendantes de la variable; mais quant à l'expression générale de la fonction $\varphi(\omega)$ déterminée par la condition (2), elle ne saurait être développée à l'aide de la série de Maclaurin qu'en tant que la fonction générale indiquée par M. Beltrami ne tombe pas dans les cas d'exception de cette série. Or elle tomberait dans un de ces cas si, au lieu de la valeur

$$\varphi'(o)=\varphi'''(o)=\ldots=o,$$

on prenait les valeurs infinies qui satisfont aussi aux dérivées de l'équation

$$\varphi(2\omega)=\varphi(\omega)\cos\omega.$$

Ces méthodes ne sont donc que des procédés particuliers, conduisant à une conséquence exacte, mais qui n'est elle-même qu'une solution particulière de la question.

Le chapitre XVI du *Calcul infinitésimal* de M. Duhamel renferme des questions qui ont, sous un certain rapport, de l'analogie avec celle qui nous occupe. Des formules (2) des différents paragraphes de ce chapitre, considérées dans des cas particuliers relativement aux constantes arbitraires qui y sont contenues, on remonte bien facilement aux formules générales (1); mais de celles-ci on ne pourrait arriver aux solutions complètes sans avoir recours à des méthodes générales, telles que les procédés de l'intégration des équations différentielles déduites des équations de condition, qui donnent le moyen d'introduire dans les résultats toute la généralité dont ils sont susceptibles.

QUESTION 560;

SOLUTION DE M. ABRAHAM SCHNÉE,
Élève du lycée Charlemagne.

ÉNONCÉ. — *Étant donnés un triangle conjugué à une conique et un cercle circonscrit au triangle, le produit des distances du centre de la conique aux côtés du triangle, multiplié par le diamètre du cercle circonscrit, est égal au produit des carrés des demi-axes de la conique.* (FAURE.)

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les trois côtés du triangle donné que je prends pour triangle de référence; ce triangle sera conjugué à la conique

$$l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2 = 0.$$

Si l'on pose, conformément à la notation du Mémoire (p. 289 du tome II, 2e série) :

$$\nabla = \begin{vmatrix} a & l & 0 & 0 \\ b & 0 & m & 0 \\ c & 0 & 0 & n \\ 0 & a & b & c \end{vmatrix},$$

où a, b, c sont les longueurs des trois côtés du triangle de référence, et

$$\Delta = \begin{vmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{vmatrix};$$

les distances du centre de la conique aux côtés du triangle

seront données par les formules (*voir* le Mémoire cité) :

$$\alpha' = \frac{S}{\nabla}\frac{d\nabla}{da},$$

$$\beta' = \frac{S}{\nabla}\frac{d\nabla}{db},$$

$$\gamma' = \frac{S}{\nabla}\frac{d\nabla}{dc},$$

où S est la surface du triangle de référence.

Le produit des carrés des demi-axes principaux de la conique est donné (*voir* le même Mémoire) par la formule

$$\mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 = \frac{a^4 b^4 c^4}{4R^2}\frac{\Delta^2}{\nabla^3},$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle; mais on a

$$2R = \frac{abc}{2S},$$

ce qui réduit l'expression à

$$(2S)^2 a^2 b^2 c^2 \frac{\Delta^2}{\nabla^3}.$$

Cela posé, il s'agit de prouver que

$$\frac{abc}{2S}\frac{S^3}{\nabla^3}\frac{d\nabla}{da}\frac{d\nabla}{db}\frac{d\nabla}{dc} = (2S)^2 a^2 b^2 c^2 \frac{\Delta^2}{\nabla^3},$$

ou, en réduisant, que

$$\frac{d\nabla}{da}\frac{d\nabla}{db}\frac{d\nabla}{dc} = 8abc.\Delta^2.$$

Or, on a

$$\nabla = a^2 mn + b^2 nl + c^2 lm, \quad \Delta = lmn,$$

$$\frac{d\nabla}{da} = 2amn, \quad \frac{d\nabla}{db} = 2bnl, \quad \frac{d\nabla}{dc} = 2clm,$$

et la substitution donne une identité.

PROBLÈME PROPOSÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL DANS LA CLASSE DE RHÉTORIQUE (SCIENCES, ANNÉE 1863);

SOLUTION DE M. R. MALLOIZEL,
Élève du lycée Louis-le-Grand (*).

ENONCÉ. — *Dans un triangle* ABC, *où le rayon du cercle circonscrit est égal à l'unité, on mène les bissectrices des suppléments des angles; on forme ainsi un deuxième triangle* A'B'C' (*le sommet* A' *se trouvant dans l'angle* A, *etc*). *On donne le rapport* λ *du côté* AB *à la somme des deux autres* BC *et* AC; *le rapport* μ *du côté* A'B' *à la somme des deux autres* B'C' *et* A'C'. *On demande de résoudre le triangle* ABC, *et de trouver les conditions de possibilité du problème.*

Appelons A, B, C; a, b, c les angles et les côtés du premier triangle; A', B', C'; a', b', c' les angles et les côtés du second.

L'énoncé nous donne les relations

$$\frac{c}{a+b}=\lambda,\quad \frac{c'}{a'+b'}=\mu.$$

1° Calculons les angles A, B, C.

On a, dans le triangle ABC,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

d'où

$$\frac{c}{a+b}=\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}=\lambda,$$

(*) M. R. Malloizel a obtenu le premier prix au Concours.

ou

$$\frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\lambda,$$

ou

(1) $$\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\lambda.$$

Nous avons ainsi une première équation entre les angles $\frac{C}{2}$ et $\frac{A-B}{2}$. Cherchons-en une seconde.

Nous aurons dans le triangle A′B′C′, comme dans le triangle ABC, l'équation

$$\frac{c'}{a'+b'}=\frac{\sin\frac{C'}{2}}{\cos\frac{A'-B'}{2}}=\mu.$$

Or, on reconnaît facilement sur la figure, en menant les bissectrices des trois angles A, B, C, les relations :

$$C'=\frac{A+B}{2},\quad B'=\frac{A+C}{2},\quad A'=\frac{B+C}{2}.$$

Notre dernière égalité devient donc

$$\frac{\sin\frac{A+B}{4}}{\cos\frac{A-B}{4}}=\mu.$$

On sait que

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\quad \cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Appliquant ces formules, il vient

$$\frac{\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{A+B}{2}}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{A-B}{2}}{2}}}=\mu,$$

ou

$$(2) \qquad \frac{1-\sin\dfrac{C}{2}}{1+\cos\dfrac{A-B}{2}}=\mu^2.$$

Reste donc à résoudre les deux équations (1) et (2) du premier degré en $\sin\frac{C}{2}$ et $\cos\frac{A-B}{2}$:

$$\frac{\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}}=\lambda, \qquad \frac{1-\sin\dfrac{C}{2}}{1+\cos\dfrac{A-B}{2}}=\mu^2,$$

ou

$$\sin\frac{C}{2}=\lambda\cos\frac{A-B}{2},$$

$$1-\sin\frac{C}{2}=\mu^2+\mu^2\cos\frac{A-B}{2}.$$

Remplaçons dans la seconde équation $\sin\frac{C}{2}$ par $\lambda\cos\frac{A-B}{2}$ il viendra

$$1-\lambda\cos\frac{A-B}{2}=\mu^2+\mu^2\cos\frac{A-B}{2},$$

ou

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{1-\mu^2}{\lambda+\mu^2}.$$

(λ et μ étant des nombres donnés, cette expression sera facilement calculable par logarithmes.)

Nous pourrons alors calculer $\frac{A-B}{2}$, par suite $\frac{C}{2}$, et enfin les trois angles A, B, C.

2° Passons au calcul des côtés.

On a les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2,$$

le rayon du cercle circonscrit étant égal à l'unité; d'où l'on tire

$$a = 2\sin A,$$
$$b = 2\sin B,$$
$$c = 2\sin C.$$

Les angles A, B, C ayant été calculés, nous aurons les valeurs des trois côtés *a*, *b*, *c*.

3° *Discussion.*

La valeur de $\cos\frac{A-B}{2}$ doit être positive et plus petite que l'unité, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$\frac{1-\mu^2}{\lambda+\mu^2} > 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu < 1,$$

et

$$1-\mu^2 < \lambda+\mu^2 \quad \text{ou} \quad 2\mu^2 > 1-\lambda.$$

On a

$$\sin\frac{C}{2} = \lambda\cos\frac{A-B}{2},$$

et

$$\cos\frac{A-B}{2} > \cos\frac{A+B}{2},$$

ou

$$\cos\frac{A-B}{2} > \sin\frac{C}{2};$$

donc il faut qu'on ait

$$\lambda < 1.$$

Les trois conditions de la possibilité du problème sont donc

$$\lambda < 1,$$
$$\mu < 1,$$
$$\mu > \sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}.$$

Les deux premières conditions étaient évidentes *à priori*.

Le problème, quand ces conditions sont remplies, n'admet qu'une solution.

Comme cas limite, $\mu = \sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}$, on a alors

$$\cos\frac{A-B}{2} = 1,$$

d'où

$$A = B.$$

Le triangle est alors isocèle.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. l'abbé Aoust.

« Il est loin de ma pensée de vouloir diminuer le mérite des recherches géométriques de M. Faure, mais je dois vous faire observer que le théorème publié par ce géomètre, dans la question 668 des *Nouvelles Annales* (numéro de septembre 1863, p. 421), n'est autre chose que la reproduction de la formule (7) du Mémoire que j'ai présenté à l'Institut dans le mois de juillet dernier. Ce Mémoire a été publié le 27 du même mois dans les *Comptes rendus* de l'Académie, et la formule dont il s'agit s'y trouve à la page 219 du tome LVII.

» Ce théorème et tous les théorèmes du même ordre appartiennent à la fois à la géométrie des surfaces et à la géométrie des coniques, suivant une remarque intuitive et consignée dans presque tous les auteurs élémentaires. La formule, dans les deux cas, reste la même; mais les lettres qui, dans le premier cas, représentent des rayons de courbure, représentent, dans le second, les carrés des demi-diamètres d'une conique. Si l'on veut, on peut affecter de l'exposant 2 toutes les lettres qui, dans le premier cas, représentent les rayons de courbure, et ces mêmes lettres représenteront, dans le second, des demi-diamètres d'une conique. »

Un Abonné nous adresse la Note suivante au sujet de la méthode exposée (p. 341) pour résoudre l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

« Dans le chapitre XIV de son Algèbre (éd. de 1807, p. 415), Euler pose l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = \left(x^2 + \frac{a}{2}x + p\right)^2 - (qx + r)^2,$$

ou, comme il le dit plus loin,

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$= \left[x^2 + \left(\frac{a}{2} + q\right)x + p + r\right]\left[x^2 + \left(\frac{a}{2} - q\right)x + p - r\right].$$

» L'identification lui donne

$$8p^3 - 4bp^2 + (2ac - 8d)p - a^2d + 4bd - c^2 = 0,$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2p - b}, \quad r = \frac{ap - c}{2q}.$$

» Faisant

$$a = 0, \quad b = A, \quad c = B, \quad d = C, \quad 2p = z,$$

où a :

$$z^3 - Az^2 - 4Cz - (B^2 - 4AC) = 0, \quad q = \sqrt{z - A},$$

$$r = \frac{-B}{2\sqrt{z - A}},$$

$$p - r = \frac{1}{2}\left(z + \frac{B}{2\sqrt{z - A}}\right), \qquad p + r = \frac{1}{2}\left(z - \frac{B}{\sqrt{z - A}}\right).$$

Ce sont précisément les équations (4), (5) obtenues par la méthode dont il s'agit (p. 342).

» Dans cette méthode, on donne, pour résoudre l'équation

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = (x^2 + px + q)(x^2 - px + q') = 0,$$

les formules suivantes :

$$\gamma^3 - A\gamma^2 - 4C\gamma - (B^2 - 4AC) = 0, \quad p = \sqrt{\gamma - A},$$

$$q' = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{B}{\sqrt{\gamma - A}}\right), \quad q = \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{B}{\sqrt{\gamma - A}}\right);$$

de là

$$2x = \sqrt{\gamma - A} \pm \sqrt{-\gamma - A + \frac{2B}{\sqrt{\gamma - A}}},$$

$$2x = -\sqrt{\gamma - A} \pm \sqrt{-\gamma - A + \frac{2B}{\sqrt{\gamma - A}}}.$$

On peut remarquer qu'en posant $\gamma - A = \theta$, on a

$$\theta^3 + 2A\theta + (A^2 - 4C)\theta - B^2 = 0,$$

$$2x = \sqrt{\theta} \pm \sqrt{-2A - \theta + \frac{2B}{\sqrt{\theta}}},$$

$$2x = -\sqrt{\theta} \pm \sqrt{-2A - \theta + \frac{2B}{\sqrt{\theta}}},$$

formules données par M. Le Besgue, à la page 387 du tome XVII des *Nouvelles Annales* (A, B, C remplaçant p, q, r). »

Extrait d'une lettre de M. Dewulf à M. Gerono.

Bougie, 22 septembre 1863.

« Il y a fort longtemps que j'ai signalé à M. Terquem les rectifications à faire aux énoncés des théorèmes Hellermann. J'ai une lettre de M. Terquem, datée du 2 juillet 1859, dont j'extrais la phrase suivante, qui vous prouvera ce que j'avance plus haut.

« L'erreur vient d'une mauvaise traduction que j'ai » donnée du mot allemand *Schmiegungsflache*; je l'ai » rendu par *plan osculateur*, et c'est faux : c'est le plan » passant par la normale et la tangente.

» Je me propose d'avoir égard à cette correction en » publiant un beau travail de M. Valson. » Etc. »

QUESTIONS.

677. Étant donnés trois triangles circonscrits à une même conique, on peut, en considérant ces triangles deux à deux, décrire trois coniques contenant chacune six sommets de deux des triangles proposés; démontrer que ces trois coniques passent par un même point.

678. Si trois coniques ont un point commun, les neuf côtés des trois triangles, qui sont formés par les autres points d'intersection des coniques, considérées deux à deux, touchent une même conique.

679. Trois coniques quelconques ont généralement, deux à deux, six cordes communes; démontrer que les dix-huit droites qui en résultent touchent une même courbe de la troisième classe.

Ces trois questions sont proposées par M. H. Schrœter, professeur à l'Université de Breslau (Prusse).

680. Étant donnée une courbe quelconque sur une sphère, si d'un point O de la sphère on mène l'arc de grand cercle OA coupant en A la courbe, et qu'on prolonge OA en A' de manière qu'on ait $\dfrac{\sin\dfrac{OA'}{2}}{\sin\dfrac{OA}{2}} = m$, le lieu du point A' sera une seconde courbe qu'on peut appeler *courbe semblable à la première*. Démontrer que les surfaces déterminées par ces deux courbes sont entre elles comme m^2 est à 1. (VANNSON.)

681. En nommant A, B, C les trois angles d'un triangle rectiligne quelconque, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \sin A.\sin B.\sin(A-B) + \sin B.\sin C.\sin(B-C) \\ \quad + \sin C.\sin A.\sin(C-A) \\ \quad + \sin(A-B).\sin(B-C).\sin(C-A) \end{array}\right\} = 0,$$

et

$$\begin{vmatrix} \cos A & \cos B & \cos C \\ \text{séc}\, A & \text{séc}\, B & \text{séc}\, C \\ \text{coséc}\, A & \text{coséc}\, B & \text{coséc}\, C \end{vmatrix} = 0.$$

Rectification.

Page 480, ligne 10, question 676, *au lieu de*

$$\frac{4.\sin^2\widehat{rr_1}.\sin^2\widehat{r_2 r}}{a^2 b^2}, \quad \textit{lisez} \quad \frac{4.\sin^2\widehat{rr_1}.\sin^2\widehat{r_1 r_2}.\sin^2\widehat{r_2 r}}{a^2 b^2}.$$

AGRÉGATION DES LYCÉES. — CONCOURS DE 1863.

Composition d'Analyse;

SOLUTION DE M. ROUQUEL,
Licencié ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

Déterminer l'équation différentielle des lignes de courbure.

Lorsque la courbe d'intersection de deux surfaces est pour chacune d'elles une ligne de courbure, ces surfaces se coupent constamment sous le même angle.

L'étude des lignes de courbure et de leurs propriétés générales se trouvant dans tous les traités, je me bornerai ici à écrire leur équation différentielle

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dy^2}{dx^2}[s(1+p^2)-pqt]+\frac{dy}{dx}[r(1+q^2)-t(1+p^2)]\\ \qquad +pqr-s(1+p^2)\end{array}\right\}=0\ (*),$$

dans laquelle p, q, r, s et t représentent respectivement les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$.

On peut résoudre la seconde question par l'analyse de la manière suivante :

Considérons un point quelconque O sur la ligne d'intersection des deux surfaces données. Rapportons la figure à un système d'axes de coordonnées rectangulaires, ayant le point O pour origine et tel, que l'axe Ox soit dirigé suivant la tangente en O à la ligne d'intersection.

A l'origine, on aura évidemment

$$p=0,\quad p'=0,\quad \frac{dy}{dx}=0$$

(les lettres accentuées se rapportent à la seconde surface). Si V désigne l'angle des normales menées par le

---

(*) On a donné à l'équation différentielle des lignes de courbure une autre forme qu'il est utile de rappeler. Si

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0$$

représente l'équation différentielle de la surface considérée, celle de ses lignes de courbure est

$$dx(Y\,dZ-Z\,dY)+dy(Z\,dX-X\,dZ)+dz(X\,dY-Y\,dX)=0. \quad \text{G.}$$

point O aux deux surfaces, la formule générale

$$\cos V = \frac{pp' + qq' + 1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\sqrt{p'^2 + q'^2 + 1}}$$

donnera dans ce cas

$$\cos V = \frac{qq' + 1}{\sqrt{q^2 + 1}\sqrt{q'^2 + 1}}.$$

De plus, Ox étant par hypothèse tangente à l'une des lignes de courbure passant en O de la première surface, l'équation différentielle transcrite plus haut devra être satisfaite lorsqu'on y remplacera $\frac{dy}{dx}$ par la valeur particulière qui correspond à ce point.

On verra dès lors, en tenant compte de la valeur de p, qu'à l'origine

$$s = 0,$$

et de même que

$$s' = 0.$$

Cela posé, par un point infiniment voisin O′ de la ligne d'intersection menons les normales à chaque surface. La différence entre le cosinus du nouvel angle et le cosinus du premier sera égale à la différentielle de $\cos V$, et, si l'on prouve que cette différentielle est nulle, on aura démontré par cela même que ces deux angles sont rigoureusement égaux.

Or l'on a, en général,

$$dq = t\,dy + s\,dx = dx\left(t\frac{dy}{dx} + s\right).$$

Mais on a à l'origine

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad s = 0,$$

donc

$$dq = 0;$$

de même

$$dq' = 0.$$

Par suite

$$d(\cos V) = 0.$$

Le même raisonnement pouvant être appliqué à tout autre point de la ligne d'intersection, il s'ensuit que, pour tous les points de cette ligne, l'angle des normales aux surfaces ou l'angle de ces surfaces elles-mêmes est constant. C. Q. F. D.

On peut également arriver au résultat qui précède par des considérations de géométrie infinitésimale.

Si par les deux points O et O' on mène les normales à la première surface, ces normales, d'après une propriété bien connue des lignes de courbure, se coupent en un point A, ou pour mieux dire, leur plus courte distance du troisième ordre au moins par rapport à OO' peut être négligée. Les normales en O et O' à la deuxième surface se couperont de même en B.

Les triangles AOB et AO'B ont le côté AB commun; les côtés AO et AO', ne différant que d'une quantité infiniment petite du second ordre au moins, sont égaux, et il en est de même des côtés BO et BO'. Donc

$$\widehat{AOB} = \widehat{AO'B}.$$

C. Q. F. D.

Note du Rédacteur. — Cette proposition, que *si la courbe d'intersection de deux surfaces est pour chacune d'elles une ligne de courbure, ces surfaces se coupent constamment sous le même angle*, est due, je crois, à mon ancien collaborateur M. Terquem. C'est une des questions proposées, il y a onze ans, dans les *Nouvelles Annales* (question 269, t. XI, p. 402). Voici les solutions que MM. Faure et Dewulf en ont données.

QUESTION 269;

SOLUTION DE M. FAURE,
Officier d'artillerie.

THÉORÈME. — *Deux surfaces se coupant suivant une ligne de courbure commune à l'une et à l'autre, le long de cette ligne les deux surfaces se coupent sous le même angle.*

Ire Démonstration. — Soient MM′, M′M″ deux éléments consécutifs de la ligne de courbure que nous supposerons de même longueur; A, A′ les milieux de ces éléments. Menons en ces points les normales aux deux surfaces; elles se rencontreront en deux points B, B′ qui seront également distants des deux éléments. Donc, si l'on joint BB′, on formera deux triangles ABB′, A′BB′ égaux entre eux; par suite les angles en A et A′ qui mesurent ceux des surfaces seront égaux entre eux. Cette égalité se succédant pour tous les points consécutifs de la surface démontre le théorème.

IIe Démonstration. — Exécutons encore la construction précédente et soit O le point d'intersection du plan osculateur MM′M″ avec la ligne BB′. Les deux plans BAB′, BA′B′ étant tous les deux perpendiculaires au plan osculateur, leur intersection BB′ est perpendiculaire à ce plan; de plus, les droites OA et OA′ sont égales entre elles; donc les angles BAO, BA′O sont égaux entre eux ainsi que B′AO et B′A′O. Or BAO + B′AO mesure l'angle des deux surfaces au point A; de même BA′O + B′A′O mesure l'angle des deux surfaces au point A′; donc ces angles sont égaux entre eux.

La réciproque de ce théorème est vraie, c'est-à-dire que deux surfaces se coupant suivant une certaine ligne

sous le même angle, si elle est une ligne de courbure de l'une des surfaces, elle est aussi une ligne de courbure de l'autre.

Cela se voit immédiatement au moyen de la deuxième démonstration.

QUESTION 269;

SOLUTION DE M. DEWULF,
Officier du génie.

Deux surfaces se coupant suivant une ligne de courbure commune à l'une et à l'autre; le long de cette ligne les deux surfaces se coupent sous le même angle.

(TERQUEM.)

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème de Lancret que M. Liouville a énoncé comme il suit : *Pour toute ligne de courbure d'une surface, la seconde courbure géodésique est nulle* (*Journal de Mathématiques*, t. XXI). Soient m et m' deux points successifs de la ligne de courbure, O et O′ les plans osculateurs en ces points, T et T′ les plans tangents en ces points à la première surface, t et t' les plans tangents à la seconde surface.

D'après le théorème de Lancret,

$$\widehat{\mathrm{OO'}} = \widehat{\mathrm{OT}} - \widehat{\mathrm{O'T'}},$$

$$\widehat{\mathrm{OO'}} = \widehat{\mathrm{O}t} - \widehat{\mathrm{O'}t'};$$

donc

$$\widehat{\mathrm{OT}} - \widehat{\mathrm{O'T'}} = \widehat{\mathrm{O}t} - \widehat{\mathrm{O'}t'},$$

et par suite

$$\widehat{\mathrm{OT}} - \widehat{\mathrm{O}t} = \widehat{\mathrm{O'T'}} - \widehat{\mathrm{O'}t'}.$$

C. Q. F. D.

ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE DES CHINOIS (fin)

(voir Bulletin mathématique, t. VIII, 1862, p. 35);

Par M. K.-L. BIERNATZKI, Docteur a Berlin.

Crelle, t. LII, p. 59; 1856.

Telle est l'analyse succincte de cette œuvre remarquable pour son antiquité; chaque division et sous-division est accompagnée d'une stance pour l'imprimer dans la mémoire.

A cet ouvrage s'infèrent tous les développements ultérieurs de l'arithmétique; car tel est le culte des ancêtres chez les Chinois, qu'aucun auteur ne se permet d'avancer une règle, comme sienne; il la rattache toujours, comme explication, extension à une règle donnée par un ancien. Cette modestie est chez eux un acte de religion (*).

La règle la plus féconde, la plus remarquable est la *Ta-yuen* ou la *grande extension,* la recherche des quantités inconnues dans l'analyse indéterminée du 1er degré. On la trouve sous sa forme première dans le *Swan-king*, classiques arithmétiques du célèbre *Sun-tzée*. Quelques historiens chinois croient que c'est un officier qui a vécu 220 ans avant l'ère vulgaire; d'autres le placent avec plus de raison au IIIe siècle après J.-C., vers la fin de la dynastie des *Han* et au commencement de la dynastie des *Weih*. La règle de Sun-tzée débute par quatre lignes ri-

(*) Cette abnégation du *moi* n'est pas la plus brillante de nos qualités. Il existe chez nous deux tendances : voiler ce que nous devons aux prédécesseurs, dévoiler ce que le voisin leur doit. (*Note de M. Terquem.*)

mées et est enveloppée dans les questions suivantes :

Un nombre divisé par 3 donne le reste 2; divisé par 5 donne le reste 3; divisé par 7 donne le reste 2; quel est ce nombre? Le procédé est indiqué sous cette forme mystique :

Divisé par 3 donne le reste 2, écris 140,
Divisé par 5 donne le reste 3, écris 63,
Divisé par 7 donne le reste 2, écris 30;

ces trois nombres ajoutés donnent 233, en retranchant 210, le reste 23 est le nombre cherché. Ce procédé tronqué est suivi de cet aphorisme également tronqué :

Pour 1 obtenu par 3, pose 70,
Pour 1 obtenu par 5, pose 21,
Pour 1 obtenu par 7, pose 15.

Si la somme est 106 ou davantage, on soustrait 105 et le reste est le nombre cherché.

Un auteur plus récent, Tsiu-kiu-tschaou, qui vivait vers la fin de la dynastie Sung, donne l'explication suivante de cet aphorisme :

On fait le produit $3.5.7 = 105$ *Yeu-mu*, extension fondamentale;

$\frac{105}{7} = 15$ *Yeu-su*, nombre extensif; ce diviseur 7 porte le nom de nombre fondamental déterminé *Ting-mu*.

$15 = 7.2 + 1$, 1 Tsching, multiplicateur;

$15.1 = 15$ *Yeug-su*, nombre auxiliaire;

c'est ce qui explique la locution ci-dessus : pour 1 obtenu par 7, pose 15.

On agit de même par rapport aux facteurs 5 et 3, ainsi:

$\frac{105}{5} = 21$, nombre extensif;

$21 = 5.4 + 1$, 1 multiplicateur;

$21.1 = 21$, nombre auxiliaire;

c'est ce que signifie ci-dessus: 1 obtenu par 5, pose 21.

$\frac{105}{3} = 35$, nombre extensif;

$35 = 3.11 + 2$, 2 multiplicateur;

$2.35 = 70$, nombre auxiliaire.

Ces trois nombres auxiliaires 15, 21, 70, servent à continuer l'opération; on multiplie chacun par le reste correspondant; ainsi

$$15 \times 2 = 30, \quad 21 \times 3 = 63, \quad 70 \times 2 = 140,$$
$$30 + 63 + 140 = 233,$$

$233 - 105 = 128$, $128 - 105 = 23$, nombre cherché.

Cette explication a besoin d'explication.

Supposons qu'on cherche un nombre qui, divisé par p_1 laisse pour reste s_1, par p_2 laisse pour reste s_2, par p_3 laisse pour reste s_3, et soient

$$p_1 p_2 = p_3 + r_3,$$
$$p_1 p_3 = p_2 + r_2,$$
$$p_2 p_3 = p_1 + r_1,$$

et

$$N = p_1 p_2 r_3 s_3 + p_1 p_3 r_2 s_2 + p_2 p_3 r_1 s_1,$$

N divisé par p_1 laisse le même reste que $p_2 p_3 r_1 s_1$ divisé par p_1; le même reste que $r_1^2 s_1$; donc si r_1^2 divisé par p_1 laisse pour reste l'unité, N divisé par p_1 laissera pour reste s_1; de même, si r_2^2 divisé par p_2 laisse pour reste l'unité, N divisé par p_2 laissera pour reste s_2, et si r_3^2 divisé par p_3 laisse l'unité pour reste, N divisé par p_3 laissera pour reste s_3. Or, dans l'exemple de l'auteur chinois, les restes r_1, r_2, r_3 satisfont à ces conditions. Si elle n'existe pas, la solution cesse d'être bonne. Cette règle

Ta-yen servit dans la suite à calculer les cycles du prêtre nommé Yih-king, qui eut le mérite d'en avoir fait la première application; il mourut peu après la publication de son célèbre ouvrage *Ta-yen-lei-schu* en + 717; Tsiu-kiu-tschaou, ci-dessus dénommé, a composé un commentaire sur cet ouvrage, sous le titre de *Neuf sections de l'arithmétique*, pour le *Kiu-tschang*.

Ire Section. — Nombres *extensifs*, *auxiliaires* comme ci-dessus.

Je n'ai pu comprendre ce qu'on en dit. Ces nombres servaient chez les Chinois à prédire l'avenir et constituaient l'art des prédictions. A cet effet, des signes particuliers étaient affectés à ces nombres comme *clefs;* l'unité était figurée par deux traits, le 2 par un trait brisé, le 3 par un trait entier, le 4 par un trait entier et un trait brisé, etc.; c'est l'origine des *diagrammes*, restes d'un ancien système de prédictions, dont on ne peut trouver l'origine.

IIe Section. — Applications astronomiques au calcul des cycles.

IIIe Section. — Traité du travail.

Quatre compagnies d'ouvriers renfermant chacune des nombres donnés et différents d'ouvriers entreprennent la construction d'une digue; on assigne à chaque compagnie une partie de la digue à construire.

IVe Section. — Calcul des capitaux.

Sept capitaux égaux sont successivement diminués par des effets tirés chaque jour sur eux, de divers montants. La grandeur des capitaux et le nombre de jours qu'on a tirés sur eux sont inconnus, mais on connaît le montant des effets et ce qui reste des capitaux; trouver la somme des capitaux primitifs.

Vᵉ Section. — Trois fermiers possèdent chacun la même quantité de blé, qui a été achetée à divers marchés et d'après diverses mesures. L'excédant au-dessus de la mesure normale est connu; trouver la quantité de blé.

VIᵉ Section. — Trois régiments marchent vers la capitale; on connaît le nombre de lieues que fait chaque régiment par jour et l'heure où chaque régiment arrive à la capitale; trouver la distance de la capitale au lieu commun du départ.

VIIᵉ Section. — Problème des courriers de diverses vitesses.

VIIIᵉ Section. — Problème sur la fondation d'un édifice où l'on emploie quatre sortes de briques; on donne les dimensions des briques; en déduire les dimensions de la fondation.

IXᵉ Section. — Problème : trois tonneaux remplis chacun de la même quantité de riz ont été vidés en partie par des voleurs; on ne sait pas combien il y avait de riz en tout, mais on sait qu'il reste :

Dans le 1ᵉʳ tonneau...... 1 *ho*,
Dans le 2ᵉ tonneau..... 1 *sching* et 1 *ho*,
Dans le 3ᵉ tonneau..... 1 *ho*.

Les voleurs étant pris ont avoué :

Le voleur A d'avoir puisé à diverses fois dans le 1ᵉʳ tonneau avec une pelle à écurie;

Le voleur B d'avoir puisé à diverses fois dans le 2ᵉ tonneau avec un sabot;

Le voleur C d'avoir puisé à diverses fois dans le 3ᵉ tonneau avec une écuelle.

On s'est assuré que :

La pelle à écurie contient. . . . 1 *sching* et 1 *ho*,
Le sabot. . . . . 1 *sching* et 7 *ho*,
L'écuelle. . . . . 1 *sching* et 2 *ho*;

combien chaque voleur a-t-il pris de riz?

Réponse :

Le voleur A a pris 3 *schih* 1 *tau* 9 *sching* 2 *ho*,
Le voleur B a pris 3 *schih* 1 *tau* 7 *sching* 9 *ho*;
Le voleur C a pris 3 *schih* 1 *tau* 9 *sching* 2 *ho*.

La totalité du riz enlevé = 9 *schih* 5 *tau* 6 *sching* 3 *ho*.

Note. — 10 *ho* valent 1 *sching*, 10 *sching* valent 1 *tau*, 10 *tau* valent 1 *schih*; réduisant tout en *ho*, on est amené à l'équation d'analyse indéterminée

$$11x+1=17y+11=12z+1.$$

La seconde partie de l'ouvrage de Tsiu-kiu traite uniquement de calculs relatifs à l'astronomie et à la physique et toujours par la célèbre règle Ta-yuen. Les Indiens ont une semblable règle sous le nom de *Cuttaca*. Il n'est pas vraisemblable que les Chinois l'aient reçue des Indiens.

Algèbre.

Vers la fin du XIII[e] siècle, le même Tsiu-kiu-tschaou, ci-dessus dénommé, fit paraître le *Lien-tien-yuen-yih*, c'est-à-dire *Établissement de la monade céleste*. Cet ouvrage contient pour ainsi dire l'algèbre des Chinois; la *monade*, c'est notre inconnue x. Comme les Chinois n'ont pas d'alphabet, ils écrivent les polynômes par un système de positions comme les nombres; ils ont un signe particulier qui se prononce *Tae*, pour désigner la quantité

toute connue et un autre signe qui se prononce *Yuen*, pour désigner le terme qui renferme la 1re puissance de l'inconnue; l'inconnue elle-même ne s'écrit pas, elle est sous-entendue comme *unité*, *monade;* on n'écrit que les coefficients numériques. Par exemple, soit à écrire le polynôme $x^3 + 15x^2 + 66x - 360$, ils écrivent

|	x^3
| ≣	$15x^2$
T ⊥	$66x$
||| T O	360

On voit qu'en allant de bas en haut, les exposants de la monade augmentent d'une unité. Dans la pratique, lorsqu'on écrit Tae on omet Yuen, et quand on écrit Yuen on omet Tae.

Les quantités s'écrivent avec de l'encre rouge et les quantités négatives avec de l'encre noire, signes distincts qu'on rencontre déjà dans les écrits du VIe siècle; mais le Yay-king-jui-king, qui a écrit un commentaire sur le *Lei-tien-yuen*, paraît être le premier qui ait distingué le membre à droite d'une équation par un trait transversal. Le terme qui est immédiatement au-dessus du Tae est la racine carrée ou $x^{\frac{1}{2}}$, au-dessus de celle-ci c'est la racine cubique, et ainsi de suite.

Voici un exemple de résolution numérique d'une équation du quatrième degré tiré de l'ouvrage de *Tsiu*. Nous nous servirons des chiffres arabes. L'équation est (*)

$$x^4 - 1534464x^2 + 731124800x = 526727577600.$$

(*) L'équation donnée dans le Mémoire de M. Biernatzki est fautive : *a* porte le signe + et *b* est oublié. TM.

On ne donne que des résultats sans expliquer l'opération. Voici ce que j'ai compris.

Faisons, pour épargner de la place,

$$a = 1534464, \quad b = 731124800, \quad c = 5267276677600,$$
$$x^4 - ax^2 + 6x = c.$$

La racine quatrième approchée de c est 720.

Faisons

$$x = y + 700,$$
$$(y + 700)^4 - a(y + 700)^2 + b(y + 700) - c = 0,$$

ou

$$y^4 + 2800y^3 + 1405536y^2 - 451248800y - 5267276677600 = 0.$$

A la même époque un autre géomètre, nommé Tschu-schi-kils, publia, en 1303, le *Sze-yuen-yuh-kihu* (Miroir précieux des quatre éléments). Son ouvrage commence par le rapport des *Lihu* (coefficients) dans le calcul des nombres jusqu'à la huitième puissance. Il donne la table suivante comme une ancienne méthode :

1	somme primitive,
1 1	facteurs,
1 2 1	carré,
1 3 3 1	carré cube,
1 4 6 4 1 ..	carré-carré,
1 5 10 10 5 1	cinquième puissance, etc.

C'est le triangle de Pascal (*).

Les quatre éléments sont quatre *signes* tirés de l'écriture chinoise et représentant le ciel, la terre, l'homme, la chose; les trois premiers sont consacrés aux quantités connues (notre a, b, c) et la dernière la quantité incon-

(*) Ce triangle se retrouve, en Europe, dans presque toutes les arithmétiques du XVIe siècle. P.

nue (x); il les dispose ainsi autour de Tae :

	1	
1	Tae	1
	1	

Le 1 supérieur est la *chose*, soit x; l'inférieur c'est le *ciel* (a); à droite c'est l'*homme* (c), et à gauche la *terre* (b); ainsi

	x	
b	Tae	c
	a	

Supposons qu'il s'agisse d'écrire

$$(a+b+c+x)^2$$

$$= a^2+2ab+2ac+2ax+b^2+2bc+2bx+c^2+2cx+x^2,$$

Tschu le figure ainsi

			1			
	2		0		2	
				2		
1	0		Tae		0	1
		2				
	2		0		2	
			1			

ce qui équivaut à

			x^2			
	$2bx$		0		$2cx$	
				$2ax$		
b^2			Tac			c^2
		$2bc$				
	$2ab$		0		$2ac$	
			a^2			

On voit que la disposition des quantités connues et inconnues correspond au tableau des quatre éléments.

Vers la fin du XVII[e] siècle les missionnaires composèrent une Algèbre en chinois sous le titre: *Tseay-kang-fang*, et la présentèrent à l'empereur Kang. C'est à cette occasion que cet empereur ordonna la confection de la célèbre encyclopédie dont il révisa chaque feuille. Le titre chinois est : *Leuh-lei-yuen-yuen* (Sources secrètes de l'harmonie et des nombres). La troisième partie de cet excellent ouvrage, intitulée : *Suh-li-tsing-wang* (Dépôt des finesses des. règles arithmétiques), traite des sciences exactes et sert encore au collége d'astronomie de Péking. Il est divisé en deux sections principales : la première traite de l'origine des nombres; on raconte comment Fohi vit sortir de la rivière Jaune un dragon portant sur son dos le système décimal. Un dessin reproduit cet événement, suivi d'un autre dessin qui représente une tortue sortant du fleuve Lo et sur la carapace est figuré ce système décimal, qui se montre à l'éminent philosophe Yu. Cette première partie est terminée par l'ouvrage *Tschan-pi*, mentionné ci-dessus. Les trois parties suivantes sont en XII livres avec une introduction à la géométrie, mais moins claire, moins *solide* que celle d'Euclide. On y expose ce qui est nécessaire sur les surfaces et sur les corps de diverses formes. Dans le dernier livre on parle des proportions et on donne des plans et des projections pour la confection des coupes et dessins. La cinquième partie comprend ce qu'on pourrait appeler l'*arithmétique en figures;* la théorie des calculs est exposée par principes et éclaircie par des figures et des exemples. La seconde section principale traite en quarante chapitres de l'application de l'arithmétique et contient cinq divisions. La première, en deux chapitres, servant d'introduction, contient des tables de poids et mesures, des règles pour les quatre opérations et les fractions. La seconde division, en huit chapitres, traite des

lignes, des proportions, des progressions, de la règle d'alliage, de la règle de société, des profits et pertes et des équations. La troisième, en huit chapitres, s'occupe de calculs de la surface des corps, de l'extraction des racines carrées, de l'ancienne et de la nouvelle trigonométrie, de l'usage des huit lignes trigonométriques, de la méthode pour déterminer les côtés d'un triangle, de la mesure des figures rectilignes ou curvilignes, des segments circulaires et des polygones réguliers. La quatrième section, en huit chapitres, contient ce qui concerne les valeurs, l'extraction de la racine cubique, la mesure des polyèdres et des surfaces courbes, des sphères et des segments sphériques, les poids de diverses substances du règne animal, végétal ou minéral; enfin les Tas. La cinquième division, en dix chapitres, comprend des dissertations sur l'algèbre, sur diverses questions y relatives, sur les logarithmes et l'usage des secteurs; il y a, en outre, huit volumes supplémentaires avec des Tables.

Les deux premiers volumes donnent le calcul des sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, jusqu'au 90ᵉ degré. Le troisième et le quatrième volume contiennent les diviseurs de tous les nombres de 1 à 100 000, pour faciliter le calcul par logarithmes. A la fin de chaque série de dix mille, on donne la liste des nombres premiers. Le cinquième et le sixième volume contiennent les logarithmes des nombres de 1 à 100 000 avec dix décimales qui sont évidemment une copie des Tables de Vlacq, imprimées en Hollande en 1628. A la fin on trouve des règles pour calculer les logarithmes des nombres plus grands que 100 000 et une Table des pesanteurs spécifiques de diverses substances. Le septième et le huitième volume sont des Tables de logarithmes de sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, sécantes, cosécantes de 0° à 90°.

Le style de cette encyclopédie est clair, populaire, et

destiné à être lu et compris par tous les Chinois instruits.

Les Chinois s'attribuent la découverte des logarithmes. Du moins un mathématicien, nommé Le-scheu-lan, vivant aujourd'hui à Schang-haï, dans son ouvrage *Tay-suh-tan-yuen* (Découverte de l'origine des logarithmes), dit qu'il possède une méthode pour calculer les logarithmes par des considérations géométriques et qui n'est pas connue des Européens. Un mandarin, nommé Ta-heu, est aussi occupé à Hang-tschau à publier une nouvelle manière de calculer les logarithmes.

A ce qu'on apprend, les sciences tendent à prendre un nouvel essor en Chine. L'anti-empereur, qui réside à Nanking, a ordonné le rétablissement des examens annuels des jeunes étudiants, qui avaient été supprimés; il est savant lui-même et on peut espérer qu'il protégera la culture des sciences.

SOLUTION DE LA QUESTION 671;

Par M. P.-G. DE SAINT-MICHEL,
Élève de M. Beynac.

Si par un point P, pris sur une conique, on mène deux droites également inclinées sur la normale en ce point, et si l'on joint les points de rencontre de ces droites avec la courbe, 1° toutes les cordes ainsi obtenues passent par un point fixe; 2° trouver le lieu de ce point, quand le point P se meut sur la conique.

1° Soient PA, PB deux droites également inclinées sur la normale PN; C, D les points de rencontre de la corde AB avec la tangente PC et la normale PD. Les droites PD, PC, bissectrices des angles en P, divisent la corde harmoniquement; donc PN est la polaire du point C,

et par suite C est un point fixe, pôle de la normale donnée PN.

2° Le point C est le lieu des pôles des normales à la courbe. Pour en trouver l'équation, soit

$$y^2 = 2px + qx^2$$

l'équation générale des coniques; la condition pour qu'une droite $y = mx + n$ soit normale est

$$(1) \qquad n = \frac{pm}{q}\left[1 \pm (q+1)\sqrt{\frac{1}{1-m^2q}}\right]:$$

or, l'équation de la tangente au point (x, y) et menée du point C (X, Y) est

$$Yy = pX + qXx + px;$$

en y regardant x et y comme des coordonnées variables, elle représente la polaire du point (X, Y) et peut s'écrire

$$y = \frac{p + qX}{Y}x + p\frac{X}{Y}.$$

Pour exprimer que cette polaire est normale à la courbe, remplaçons dans l'équation (1) m et n par leurs valeurs : on a pour l'équation du lieu

$$p^2 = \frac{(q+1)Y^2(p+qX)^2}{Y^2 - q(p+qX)^2}.$$

En prenant la droite $p + qX = 0$ pour nouvel axe des Y, et mettant x et y à la place de X et de Y, l'équation générale du lieu est

$$p^2y^2 - p^2q^2x^2 = (q+1)^2q^2y^2x^2.$$

Ellipse. — L'équation peut se mettre sous la forme

$$a^6y^2 + b^6x^2 = c^4x^2y^2.$$

C'est une courbe concentrique à l'ellipse, ayant avec elle

les mêmes axes de symétrie; l'origine est un point isolé; elle a pour asymptotes les couples de droites représentées par les équations $x = \pm \frac{a^3}{c^2}$, $y = \pm \frac{b^3}{c^2}$; elle est intérieure aux asymptotes.

Hyperbole. — Changeant b^2 en $-b^2$, on a

$$a^6y^2 - b^6x^2 = c^4x^2y^2,$$

courbe concentrique avec l'hyperbole, ayant les mêmes axes de symétrie. L'origine est un point quadruple et en même temps un point d'inflexion : les tangentes en ce point ont pour équation

$$y = \pm \frac{b^3}{a^3} x;$$

la courbe est comprise entre les deux asymptotes

$$x = \pm \frac{a^3}{c^2}.$$

Parabole. — $q = 0$. Si l'on fait $q = 0$ dans l'équation (1), l'une des valeurs de n devient infinie, l'autre se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; faisant disparaître l'indétermination, on a

$$n = -\frac{mp(2 + m^2)}{2}.$$

Remplaçant m par $\frac{px}{y}$, n par $\frac{p}{y}$, on trouve pour l'équation du lieu

$$y^2 = -\frac{p^3}{2(p + x)},$$

courbe symétrique par rapport à l'axe de la parabole, ayant cet axe pour asymptote, ainsi que $y = -p$, et tout entière à gauche de cette asymptote.

Note.—La même question a été résolue par MM. Mirza-Nizam, élève du lycée Saint-Louis; Muzeau, lieutenant d'artillerie; Desgranges; Schnée, Tivollier et Grassat, E. P. et A. T., Picquet, Grouard, Léon Dyrion et Pétérencino, élèves; Dupain et E. M., professeurs. Ce dernier démontre que, si par un point A d'un ellipsoïde donné on décrit un cône de révolution dont l'axe soit la normale, le plan de la courbe d'intersection de ce cône avec l'ellipsoïde passe par une droite dont la position est indépendante de l'angle d'ouverture du cône. M. Dupain observe que la première partie de la question a été résolue par M. Poncelet (*Propriétés projectives,* § 484) et par Frégier (*Gergonne,* VI, 229 et 321). P.

SUR LES ÉQUATIONS DE QUELQUES CERCLES;

PAR M. JOHN GRIFFITHS,
Jesus college, Oxford.

Soit ABC un triangle dont les côtés BC, CA, AB sont représentés par les équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Désignons par $A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2$;... $A_nB_nC_n$, une série de triangles, dont les sommets A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2;... A_n, B_n, C_n, sont les milieux des côtés BC, CA, AB; B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1;... $B_{n-1}C_{n-1}$, $C_{n-1}A_{n-1}$, $A_{n-1}B_{n-1}$, respectivement: trouver l'équation en α, β, γ du cercle des neuf points passant par A_n, B_n, C_n.

Pour obtenir l'équation cherchée, il faut d'abord trouver les équations des droites B_nC_n, C_nA_n, A_nB_n.

Si a, b, c désignent les côtés opposés aux sommets A, B, C; et p, q, r les perpendiculaires abaissées de ces sommets

sur une droite quelconque, l'équation de cette droite sera

$$(1) \qquad pa\alpha + qb\beta + rc\gamma = 0.$$

Or, en représentant par $p_a, p_1, p_2, \ldots, p_n$ les longueurs des perpendiculaires abaissées du sommet A sur les droites BC, B_1C_1, $B_2C_2, \ldots, B_nC_n$, on a

$$p_a = p_a,$$
$$p_1 = \frac{1}{2} p_a,$$
$$p_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n = \frac{1}{2}(p_{n-1} + p_{n-2}),$$

d'où, par l'intégration de l'équation

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n),$$

on trouve

$$p_n = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right] p_a,$$

et, par conséquent,

$$p_a - p_n = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right] p_a;$$

donc, d'après (1), l'équation de B_nC_n et par suite celles de C_nA_n, A_nB_n seront

$$(2) \quad \begin{cases} [2^n + (-1)^{n+1}](b\beta + c\gamma) - [2^{n+1} + (-1)^n]\, a\alpha = 0, \\ [2^n + (-1)^{n+1}](c\gamma + a\alpha) - [2^{n+1} + (-1)^n]\, b\beta = 0, \\ [2^n + (-1)^{n+1}](a\alpha + b\beta) - [2^{n+1} + (-1)^n]\, c\gamma = 0. \end{cases}$$

Il reste à trouver l'équation du cercle passant par les points d'intersection des lignes

$$\begin{cases} \lambda_1\alpha + \mu_1\beta + \nu_1\gamma = 0, \\ \lambda_2\alpha + \mu_2\beta + \nu_2\gamma = 0, \\ \lambda_3\alpha + \mu_3\beta + \nu_3\gamma = 0. \end{cases}$$

Elle est

$$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)\frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}}{\lambda_1\alpha + \mu_1\beta + \nu_1\gamma} + (\lambda_2, \mu_2, \nu_2)\frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix}}{\lambda_2\alpha + \mu_2\beta + \nu_2\gamma}$$

$$+ (\lambda_3, \mu_3, \nu_3)\frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}}{\lambda_3\alpha + \mu_3\beta + \nu_3\gamma} = 0,$$

où nous posons, pour abréger,

$$(\lambda, \mu, \nu) = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu\cos A - 2\nu\lambda\cos B - 2\lambda\mu\cos C.$$

Ainsi, on a pour l'équation cherchée,

$$\frac{a^2}{b\beta + c\gamma - k_n a\alpha} + \frac{b^2}{c\gamma + a\alpha - k_n b\beta} + \frac{c^2}{a\alpha + b\beta - k_n c\gamma} = 0,$$

où

$$k_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{2^n + (-1)^{n+1}}.$$

Quand on pose $n = \infty$, on a $k_n = 2$; d'où l'on voit que ces cercles de neuf points ont pour limite le point de concours des droites

$$\begin{cases} b\beta + c\gamma - 2a\alpha = 0, \\ c\gamma + a\alpha - 2b\beta = 0, \\ a\alpha + b\beta - 2c\gamma = 0. \end{cases}$$

Le point dont il s'agit coïncide évidemment (*) avec le centre de gravité de l'aire ABC.

En faisant

$$L = a\alpha + b\beta + c\gamma, \quad \rho_n = (1 + k_n),$$

(*) Cela devient encore bien plus évident quand on fait usage de quelques considérations géométriques très-simples tirées de la similitude des triangles considérés. P.

nous aurons pour les équations des cercles passant par A_r, B_r, C_r; A_s, B_s, C_s respectivement,

$$S_r = a^2(L-\rho_r b\beta)(L-\rho_r c\gamma) + b^2(L-\rho_r c\gamma)(L-\rho_r a\alpha) + c^2(L-\rho_r a\alpha)(L-\rho_r b\beta) = 0,$$

$$S_s = a^2(L-\rho_s b\beta)(L-\rho_s c\gamma) + b^2(L-\rho_s c\gamma)(L-\rho_s a\alpha) + c^2(L-\rho_s a\alpha)(L-\rho_s b\beta) = 0,$$

d'où

$$\rho_s^2 S_n - \rho_r^2 S_s = L^2(\rho_s^2-\rho_r^2)(a^2+b^2+c^2) - L\rho_r\rho_s(\rho_s-\rho_r) \times [a^2(b\beta+c\gamma)+b^2(c\gamma+a\alpha)+c^2(a\alpha+b\beta)],$$

et par conséquent

$$\rho_s^2 S_r - \rho_r^2 S_s = L(\rho_s-\rho_r) \times [(a^2+b^2+c^2)(\rho_r+\rho_s-\rho_r\rho_s)L+\rho_r\rho_s(a^3\alpha+b^3\beta+c^3\gamma)];$$

donc l'axe radical des cercles S_r, S_s a pour équation

$$\left(\frac{1}{\rho_r}+\frac{1}{\rho_s}-1\right)(a^2+b^2+c^2)L+a^3\alpha+b^3\beta+c^3\gamma = 0.$$

Il suit de là que l'axe radical de deux quelconques des cercles considérés est donné en direction par l'équation

$$a^3\alpha+b^3\beta+c^3\gamma = 0.$$

Si l'on fait $S = 0$, on aura $k_s = \infty$, et, par conséquent, $\rho_s = \infty$, ou $\frac{1}{\rho_s} = 0$.

Donc l'axe radical de S_r, S_0 a pour équation

$$\left(\frac{1}{\rho_r}-1\right)(a^2+b^2+c^2)L+a^3\alpha+b^3\beta+c^3\gamma = 0;$$

le cercle représenté par S_0 est évidemment le cercle circonscrit au triangle ABC.

Il est bon de remarquer que la droite

$$a^3\alpha+b^3\beta+c^3\gamma = 0$$

est parallèle à

$$\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C = 0.$$

Or, cette dernière équation représente l'axe radical commun des cercles S_0, S, Σ, où Σ désigne le cercle par rapport auquel chaque sommet A, B, C est le pôle du côté opposé. On trouve donc que tous les axes radicaux du système Σ, S_0, S_1, S_2,..., S_n sont parallèles.

On peut démontrer d'une manière analogue que l'équation du cercle inscrit au triangle $A_n B_n C_n$ sera

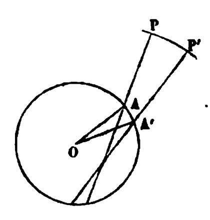
$$\sqrt{\cot\frac{A}{2}(b\beta + c\gamma - k_n a\alpha)} + \sqrt{\cot\frac{B}{2}(c\gamma + a\alpha - k_n b\beta)}$$
$$+ \sqrt{\cot\frac{C}{2}(a\alpha + b\beta - k_n c\gamma)} = 0.$$

SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES DE QUELQUES QUESTIONS DES NOUVELLES ANNALES;

PAR M. M. LAQUIÈRE,
Lieutenant d'artillerie.

Question 658. (HATON.)

La développante de cercle est la trajectoire du pôle d'une spirale logarithmique roulant sur un cercle.



Soit A le point de contact de la spirale dont le pôle

est en P sur le cercle qui a pour centre O. L'angle du rayon vecteur de la spirale PA avec sa normale OA étant constant pour tous les points de la courbe, il en résulte que la droite PA fait un angle constant avec le rayon du point où elle coupe le cercle O. Elle enveloppe donc un cercle. C. Q. F. D.

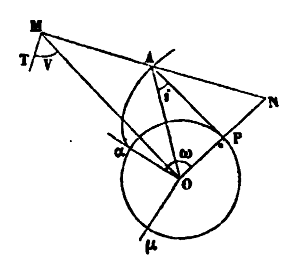
Si R est le rayon du cercle enveloppe de la spirale et a la base de celle-ci $\left(\rho = a^{\omega}\right)$, la trajectoire du pôle aura pour développée un cercle de centre O et dont le rayon r est égal à

$$r = \frac{R}{\sqrt{1 + (\log \text{nep}\, a)^2}}.$$

Question 659. (Haton.)

La caustique par réflexion de la développante de cercle, le point lumineux étant au centre, est une développée de spirale d'Archimède.

Soient OA le rayon incident, AP la normale en A à



la développante; N le point symétrique du centre par rapport à AP : la droite NA est le rayon réfléchi.

Par le centre je mène OM parallèle à AP; on aura

$$OM = 2AP = 2R\omega.$$

Le point M décrit une spirale d'Archimède dont le rayon initial est perpendiculaire à celui de la dévelop-

pante. De plus MN est normale à la courbe en M; car elle joint le point décrivant M à un point pris sur la perpendiculaire au rayon vecteur à une distance du pôle égale à la longueur constante 2R de la sous-normale. Ce qui démontre le théorème énoncé.

Question 660. (Haton.)

La courbe réciproque de la développante de cercle pour les rayons vecteurs émanés du centre est une spirale tractrice.

En effet, dans deux courbes réciproques la tangente en un point de l'une d'elles et la normale au point correspondant de l'autre font des angles complémentaires avec le rayon vecteur. Si No est la distance du pôle à la normale à l'une des courbes, T′ la longueur de la tangente à l'autre, on aura dans deux triangles rectangles semblables

$$\frac{\rho}{\mathrm{N}o} = \frac{\mathrm{T}'}{\rho'},$$

et, de même,

$$\frac{\mathrm{S}n}{\rho} = \frac{\rho'}{\mathrm{S}t},$$

St, Sn représentant la sous-tangente et la sous-normale; d'où

$$\rho^2 = \rho\rho' = \mathrm{N}o\,.\,\mathrm{T}' = \mathrm{S}n\,.\,\mathrm{S}t.$$

Ainsi la courbe dont les rayons vecteurs sont réciproques de ceux de la développante de cercle (No = const.) est la spirale tractrice (T′ = const.).

La courbe réciproque de la spirale d'Archimède (Sn = const.) est la spirale hyperbolique (St = const.).

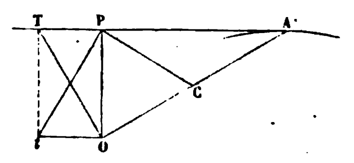
Question 661. (Haton.)

Le lieu du pôle d'une spirale hyperbolique roulant

sur elle-même en partant de la coïncidence des pôles est une spirale tractrice.

Il est évident que cette courbe n'est autre que la podaire du pôle de la spirale amplifiée au double. Il suffit donc d'étudier la podaire de la spirale hyperbolique.

Soient AT la tangente à une courbe, O le pôle, P sa pro-



jection sur la tangente; C étant pris au milieu de OA, PC sera la normale à la podaire. Soient OT la sous-tangente à la première courbe, Ot à sa podaire. Les angles en P et en O étant droits et les angles TOP, tPO égaux, la figure OPTt est un rectangle; par suite OT = Pt; ainsi la tangente à la podaire d'une courbe est égale à la sous-tangente de celle-ci.

La spirale hyperbolique définie par une sous-tangente constante a donc pour podaire une spirale tractrice dont la tangente est constante.

QUESTIONS.

682. Soient les trois variables x, y, z exprimées par les nouvelles variables u, v, w, de la manière suivante :

$$x = \frac{(1 + h^2 v^2 + c^2 w^2)\, u}{u^2 + v^2 + w^2},$$

$$y = \frac{[1 - h^2 u^2 + (c^2 - h^2)\, w^2]\, v}{u^2 + v^2 + w^2},$$

$$z = \frac{[1 - c^2 u^2 - (c^2 - h^2)\, v^2]\, w}{u^2 + v^2 + w^2};$$

h et c sont des quantités constantes; il faut démontrer que

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = P^2 du^2 + Q^2 dv^2 + R^2 dw^2,$$

ou

$$Pu = x, \quad Qv = y, \quad Rw = z.$$

(Strebor.)

683. Soient

$$l \cos\theta + m \sin\theta \cos\varphi + n \sin\theta \sin\varphi$$
$$+ p \cos^2\theta + q \sin^2\theta \cos^2\varphi + r \sin^2\theta \sin^2\varphi = U,$$

$$\frac{l^2}{2p+\psi} + \frac{m^2}{2q+\psi} + \frac{n^2}{2r+\psi} + \psi = V.$$

Il faut démontrer que l'équation résultant de l'élimination de θ et de φ entre $U = 0$, $\frac{dU}{d\theta} = 0$, $\frac{dU}{d\varphi} = 0$, sera identique avec celle qui provient de l'élimination de ψ entre $V = 0$, $\frac{dV}{d\psi} = 0$. (Cayley.)

COMPOSITION POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE [ANNÉE 1863 (*)].

On donne sur un plan une courbe du 2e degré (σ), et une circonférence décrite de l'un de ses foyers (F) comme centre; en chaque point M de la conique σ, on trace la normale à cette courbe; on mène des tangentes au cercle (F) par les deux points où cette normale le rencontre; ces deux tangentes se coupent en un point T.

(*) Cette composition a été donnée à quelques élèves qui n'ont pas pu composer en même temps que la majorité des candidats.

On demande le lieu que décrit le point T, lorsque le point M parcourt la courbe σ.

Examiner les différentes formes de ce lieu selon le genre de la conique (σ) et la grandeur du rayon de la circonférence donnée.

BIBLIOGRAPHIE.

F. Woepcke. — *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens.* (Journal Asiatique, 1863.)

C'est au milieu du XIIe siècle que commença à se répandre parmi les nations chrétiennes la connaissance de l'arithmétique indienne, sous le nom d'*algorisme*, mot qui n'est, comme on sait, que la transcription du nom du célèbre Alkhârizmi, auteur du plus ancien Traité de calcul indien connu chez les Arabes. Les méthodes simples et expéditives de ce calcul avaient été portées de l'Inde dans l'Orient musulman vers le milieu du IXe siècle, et, peu d'années après, chez les Arabes d'Afrique et d'Espagne. C'est dans ce dernier pays, à Tolède surtout, ville soumise aux chrétiens depuis Alphonse VI de Castille (1085), que les Bath, les Reading, les Shelley, les Morley, les Gérard de Crémone allèrent, au XIIe siècle, étudier les sciences mathématiques si négligées à cette époque partout ailleurs que chez les Arabes. Dès le siècle suivant, le calcul indien, au moyen de neuf caractères et du zéro, fut en plein usage en Europe, où ces caractères reçurent naturellement le nom de *chiffres arabes*.

Telle est certainement la voie par laquelle nous sont parvenus les procédés arithmétiques des Indiens. Mais un fait qui n'est pas moins sûr, c'est qu'antérieurement à

toute communication scientifique avec l'Orient musulman, l'Europe possédait un système de calcul par l'emploi de neuf chiffres avec valeur de position. Ces chiffres, dans les formes que nous offrent les plus anciens manuscrits du moyen âge, présentent la plus frappante analogie avec nos chiffres actuels et avec les chiffres dits *gobâr*, dont se servaient les Arabes d'Espagne et d'Afrique. Neuf caractères tout à fait semblables se rencontrent dans un passage de la *Géométrie de Boèce*, qui dit que les pythagoriciens (ou plutôt les néopythagoriciens) en faisaient usage, dans les multiplications et les divisions, au moyen d'un tableau à colonnes nommé *abacus*.

En présence de ces faits, M. Wœpcke s'est demandé si nous devions nos chiffres aux Arabes, ou si au contraire ce n'étaient point les Arabes qui les avaient empruntés à l'Europe chrétienne. Il faut ici faire une distinction importante entre les Arabes d'Orient et ceux d'Occident. Ceux-là emploient une série de chiffres qui présentent, avec les chiffres gobâr de leurs congénères occidentaux, une différence très-marquée sur laquelle nous reviendrons. Nous ne parlons en ce moment que des chiffres gobâr. Si le fait énoncé par l'auteur de la *Géométrie de Boèce* est exact, si la forme donnée pour les chiffres a été à peu près fidèlement transmise, on ne saurait douter que ces chiffres ne soient les types primitifs des chiffres gobârs et des nôtres.

Dans la *Géométrie de Boèce*, les neuf *apices* ou chiffres sont accompagnés de noms dans lesquels M. Vincent a vu, le premier, un mélange de racines sémitiques désignant des valeurs numériques, et de racines grecques rappelant les idées mystiques des néopythagoriciens sur les nombres; fait important qui révèle, dit M. Wœpcke, l'époque de syncrétisme à laquelle ces noms durent leur origine. Pénétré de l'idée que les chiffres avaient une

origine indienne, et s'appuyant sur la découverte de James Prinsep, d'après laquelle les chiffres indiens ont été formés originairement des initiales des numératifs sanscrits correspondants, M. Wœpcke a comparé les *apices*, en même temps que les chiffres gobâr, avec une liste d'anciens alphabets sanscrits. Cette comparaison lui a fait apercevoir une « extraordinaire ressemblance » entre les signes en question et les initiales des numératifs correspondants, prises dans un de ces alphabets qui appartient au IIe siècle de notre ère. Le 4 seul présente avec l'initiale correspondante une dissemblance absolue; mais il faut observer que, de tous les chiffres des manuscrits latins du moyen âge, le 4 est celui qui offre le plus de variantes.

Une telle ressemblance de huit signes sur neuf ne saurait être fortuite; et si les faits ne viennent point contredire l'hypothèse d'une origine indienne, cette hypothèse ne laissera pas de présenter une très-grande probabilité.

Or, dès les premiers siècles de notre ère, l'usage des neuf chiffres et du zéro avec valeur de position était déjà habituel dans l'Inde (M. Wœpcke n'hésite pas à en attribuer l'invention aux brahmanes, et les arguments qu'il fournit à l'appui de son opinion paraissent concluants). A la même époque, il existait des relations continues entre Alexandrie et Odjéïn, l'un des centres de la civilisation indienne. Le savant *Mémoire* de M. Reinaud *sur les relations de l'empire romain avec l'Asie orientale,* Mémoire qui paraissait dans le *Journal Asiatique* en même temps que celui de M. Wœpcke, ne laisse aucun doute sur l'activité et l'état florissant du commerce qui régna entre l'Inde et l'Égypte, depuis le dernier des Ptolémées jusqu'au démembrement de l'empire romain. Les deux pays, en échangeant les productions du sol et de l'industrie, ne pouvaient manquer d'échanger aussi celles

de l'esprit. « Il parait donc tout naturel que les Grecs, » observateurs originaux en astronomie et excellents » géomètres, aient communiqué aux Indiens leurs théo» ries astronomiques, ainsi que le calcul sexagésimal dont » ils faisaient usage en astronomie, tandis que les In» diens, spécialement doués pour la spéculation méta» physique et pour l'étude des propriétés des nombres, » donnèrent une partie de leurs doctrines philosophiques » et leurs chiffres aux néopythagoriciens d'Alexandrie. »

En recevant les chiffres indiens, les néopythagoriciens n'en apprirent sans doute pas bien nettement l'usage. Ils ne virent dans cette invention qu'un moyen de transformer l'abacus manuel des Grecs et des Romains en abacus écrit. Leur calcul, fondé cependant sur la valeur de position décimale, s'effectua au moyen du tableau à colonnes, et laissa le zéro sans emploi. C'est sous cette forme qu'ils répandirent l'arithmétique pratique chez les nations latines, et c'est ainsi qu'on la trouve présentée dans le livre attribué à Boèce et dans les traités latins antérieurs au XIIe siècle.

L'usage de l'abacus et des neuf chiffres se répandit plus facilement chez les Latins que chez les Grecs, parce que la numération de ceux-ci était moins imparfaite. Cet usage avait sans doute pénétré depuis longtemps en Espagne, quand les Arabes y arrivèrent en conquérants. Les Arabes, sortant du désert, possédaient à peine l'écriture; ils n'avaient aucune idée des chiffres. Lorsqu'ils eurent soumis de vastes contrées, la nécessité d'administrer les finances leur fit adopter dans chaque pays les signes de numération qu'ils y trouvèrent employés. C'est ainsi qu'en Syrie ils conservaient encore au VIIIe siècle la notation numérique grecque, et qu'en Égypte ils se servaient des chiffres coptes, presque identiques d'ailleurs aux lettres numérales grecques. Ils durent de même adop-

ter en Espagne l'abacus, les chiffres et les procédés propagés par les néopythagoriciens. Longtemps après, quand leur parvinrent les vraies méthodes du calcul indien, qui remplaçaient le tableau à colonnes par l'emploi du zéro et simplifiaient infiniment les opérations, les Arabes d'Espagne s'empressèrent de les accueillir, mais sans renoncer à la forme des chiffres auxquels ils étaient accoutumés. Les nouveaux procédés ayant reçu le nom de *calcul du gobâr*, c'est-à-dire calcul de la poussière, « soit à cause de l'habitude de calculer sur le sable, soit par allusion au nombre des grains de poussière qui paraît avoir joué dans l'Inde un rôle important, » les chiffres eux-mêmes, bien qu'ils fussent employés antérieurement, finirent par s'appeler aussi *chiffres gobâr*, et les Arabes en ayant oublié l'origine se persuadèrent qu'ils les avaient reçus de l'Inde avec la nouvelle arithmétique. Par des motifs semblables, les chrétiens les appelèrent *chiffres arabes*, quoique au fond ce ne fussent que les *apices* de Boèce rendus plus cursifs par un fréquent usage.

Ainsi, en résumé, nos chiffres actuels, dits *arabes*, furent originairement les initiales des noms de nombre sanscrits correspondants. De l'Inde ils furent portés à Alexandrie, et passèrent de là aux peuples latins, aux habitants de l'Espagne et à leurs conquérants arabes, chez qui nos arithméticiens du XII[e] siècle allèrent les reprendre.

Nous avons dit que les chiffres gobâr diffèrent sensiblement des chiffres communément employés par les Arabes d'Orient. Ceux-ci furent introduits chez les musulmans en même temps que les méthodes du calcul indien. Ils venaient directement de l'Inde. La différence entre ces caractères et les caractères gobâr ne porte essentiellement que sur le 5, le 6, le 7 et le 8. Dans le Traité d'Alkhârizmi ces quatre chiffres présentent aussi une

certaine variété de formes, et le savant Albiroûni observe que dans l'Inde, au commencement du XIe siècle, ils présentaient également des figures variables. Il est remarquable, je ne sais si M. Wœpcke s'en est aperçu, qu'en supprimant le cinquième chiffre dans la série orientale et en le portant avant le 9, la nouvelle série sera presque identique à la série gobâr.

Dans le Traité d'Alkhârizmi, le signe du zéro est un petit cercle que les Arabes ont postérieurement remplacé par un point. M. Wœpcke s'arrête un instant à discuter l'étymologie de ce mot *zéro*. Il se range à l'opinion de M. Libri qui en trouve l'origine dans *zefiro*, forme italienne de l'expression *zephirum* par laquelle Léonard de Pise transcrit *cifron*, nom arabe du zéro. *Cifron* n'est que la traduction du mot sanscrit *çoûnya*, vide, dont l'initiale fut le premier type du zéro indien. Ce même terme *cifron* est incontestablement l'origine du mot *chiffre*. M. Wœpcke observe qu'en anglais *cipher* et en portugais *cifra* ont encore le sens de zéro. Le mot français *chiffre* n'a pas conservé cette signification qu'il a eue autrefois.

Dans cette rapide analyse d'un Mémoire qui comprend deux cents pages pleines de faits, nous avons été forcé de négliger bien des détails intéressants. M. Wœpcke est un de ces savants consciencieux qui, loin de prendre un ton affirmatif, ne hasardent une hypothèse qu'en l'appuyant d'un bon nombre d'arguments solides. Nous avons dû laisser de côté la plupart de ces arguments et nous contenter d'énoncer les conclusions. Toutes les personnes qui s'intéressent aux études historiques concernant les sciences liront ce Mémoire avec un vif intérêt, dussent-elles (tous nos savants ne sont pas, comme M. Wœpcke, familiarisés avec les langues de l'Asie) franchir les passa-

ges sanscrits, persans ou arabes, qui s'y trouvent en grand nombre. L.-M. Devic.

Note. — Pour mieux faire saisir la ressemblance signalée par M. Wœpcke entre nos chiffres et les chiffres gobâr, nous donnerons le tableau suivant dont les éléments sont empruntés à l'ouvrage intitulé : *Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux anciens et modernes,* par M. A.-P. Pihan.

Chiffres européens.........	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
» indo-arabes.......	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	• ou ٥
» gobâr asiatiques....	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	(pas de zéro)
» gobâr occidentaux..	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	•
Apices de Boèce...........	I	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	O

L'ouvrage de M. Pihan, chef-d'œuvre de typographie, est le plus vaste recueil de documents graphiques et linguistiques qui aient jamais été rassemblés sur l'histoire de la numération. P.

BULLETIN.

Van den Mensbrugghe, docteur ès sciences, répétiteur de physique à l'École du Génie civil de Gand. — *Note sur la théorie mathématique des courbes d'intersection de deux lignes tournant dans le même plan autour de deux points fixes*. Note présentée à l'Académie Royale de Belgique. In-8 de 22 pages; 1863. (Extrait des *Mémoires des Savants étrangers*.)

Problème proposé par M. Plateau, résolu par Le François dans la *Correspondance mathématique* de Quetelet, en supposant

commensurables les vitesses de deux courbes. M. Van den Mensbrugghe résout le même problème dans toute sa généralité. L'auteur a reproduit tous ses résultats au moyen d'un appareil ingénieux de M. Plateau, et toujours la théorie s'est trouvée pleinement vérifiée.

BELLAVITIS, professeur à l'Université de Padoue. — Revista... *Revue des journaux scientifiques.* (Extrait des *Actes de l'Institut vénitien des Sciences, des Lettres et des Arts.*)

Dans cette Revue, dont la sixième partie vient de paraître, M. Bellavitis donne les titres des principaux articles des journaux scientifiques, en y joignant des remarques historiques ou bibliographiques, quelquefois de nouvelles solutions ou des développements toujours instructifs. Les *Nouvelles Annales* y occupent une grande place.

The Lady's, Farmers and Mathematical Almanack for the year 1862; *id.* 1863. In-12. Dublin.

Cette publication annuelle renferme un nombre considérable de charades, de rébus et de questions mathématiques, dont quelques-unes sont proposées en vers. Nous y avons pris l'énoncé de notre question 656 dont l'auteur, M. Matthew Collins, a bien voulu nous faire connaître l'élégante solution.

Le petit almanach de Dublin nous révèle un genre littéraire inconnu en France, la charade élégiaque. Où l'élégie va-t-elle se nicher! Il est vrai qu'il s'agit de déplorer le trépas d'un collaborateur qui excellait à composer et à deviner des charades. *Mac-Dermott is no more! Alas!*

MATTHEW COLLINS. — A Tract on... *Traité sur les cas de possibilité ou d'impossibilité des doubles égalités, dans l'analyse de Diophante.* In-8 de 60 pages. Dublin, 1858.

BELTRAMI. — Sulla... *Sur la théorie des développoïdes et des développantes.* In-4 de 22 pages. (Extrait des *Annali di Matematica*, t. IV.)

La *développoïde* d'une courbe est une seconde courbe dont chaque tangente est coupée par la première sous un angle ω, fonction quelconque des coordonnées du point d'intersection. Cette dénomination paraît due à M. Brioschi, au moins dans ce sens. Le mot *développante* a été imaginé par Fontenelle, *Histoire de l'Académie des Sciences*, 1712, p. 63.

CASORATI (Felice). — Ricerca fondamental... *Recherche fondamentale pour l'étude d'une certaine classe de propriétés des surfaces courbes.* In-4 de 28 pages. (Extrait des *Annali.*)

Une surface étant considérée comme flexible, mais inextensible, l'auteur se propose d'étudier les propriétés de la surface qui subsistent lorsqu'on lui fait subir une déformation.

CREMONA. — Introduzione... *Introduction à une théorie géométrique des courbes planes.* (Principes généraux et application aux courbes du troisième ordre.) In-4 de VIII-128 pages; 1862. (Extrait des *Mémoires de l'Institut de Bologne.*)

On rendra compte de cet ouvrage.

CREMONA. — Sulle... *Sur les transformations géométriques des figures planes.* In-4 de 12 pages. Bologne, 1862. (Extrait des *Mémoires de l'Institut de Bologne.*)

L'auteur étudie la transformation des courbes dans lesquelles à un point de la proposée correspond un seul point de la transformée, et à une droite de la proposée une courbe du $m^{ième}$ degré dans la transformée. Généralisation de la transformation conique.

M. de Jonquières a traité les mêmes questions dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences, et dont nous donnerons prochainement un extrait (*voir* les *Comptes rendus*, t. XLIX, p. 542, 1859).

AOUST (l'abbé). — *Note sur la surface des courbures.* In-4 de 4 pages; juillet 1863. (Extrait des *Comptes rendus.*)

BRIOSCHI, de l'Institut Lombard, député au Parlement national. — *Sur la résolvante de Malfatti pour les équations du cinquième degré.* In-4 de 16 pages. (Extrait des *Mémoires de l'Institut Lombard.*)

Le but de ce travail est de revendiquer pour Malfatti les résultats trouvés par quelques géomètres anglais. Dans la note 1, l'auteur donne, en l'abrégeant, le calcul de Malfatti. Dans la note 2, il réduit la résolvante à la forme des équations du sixième degré qui comprend, comme cas particulier, les équations qu'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques quand on résout le problème de la transformation du cinquième ordre. Enfin (note 3), il montre que la transformée de la résolvante conduit à la résolution d'une équation du cinquième degré.

HIRST (T.-A.). — *Sur les volumes des surfaces podaires.* In-4 de 20 pages. (Extrait du *Journal de Crelle,* LXe volume.)

La podaire d'une courbe fermée est une courbe fermée. Si l'origine de la podaire (lieu d'où on abaisse les perpendiculaires sur les tangentes à la courbe donnée) se déplace de manière que l'aire de la podaire reste constante, le lieu de ces rayons sera une circonférence de cercle. Les diverses circonférences qui correspondent à différentes aires sont concentriques, le centre commun étant l'origine de la podaire d'aire minimum. M. Hirst cherche à généraliser ce théorème de Steiner. Il trouve que,

quelle que soit la nature d'une surface donnée, les origines des podaires de volume constant (*) sont situées sur une surface du troisième ordre; et en second lieu que, quand la surface primitive est fermée, la surface, lieu des origines des podaires de volume constant, est du second ordre et que l'ensemble de ces lieux forme un système de surfaces semblables, semblablement placées et concentriques, dont le centre commun est l'origine de la podaire de volume minimum.

BELTRAMI. — *Sur la conique des neuf points et sur quelques questions qui en dépendent.* 38 pages in-4. Bologne, 1863. (Extrait des *Mémoires de l'Institut de Bologne.*)

Le théorème sur le contact du cercle des neuf points, attribué quelquefois à Terquem, d'autres fois à Steiner, est revendiqué par Steiner lui-même pour son compatriote Feuerbach dans un opuscule intitulé : *Die geometrischen Mittelst der geraden Linie und eines festen Kreisen;* Berlin, 1833. Steiner l'avait énoncé dans les *Annales de Gergonne,* en 1828, sans en connaître l'auteur. M. Beltrami se propose de démontrer ce théorème en le généralisant au moyen d'une certaine transformation géométrique.

Feuerbach (Charles-Guillaume), professeur de mathématiques au gymnase d'Erlangen, est né le 30 mai 1800 à Iéna et mort le 12 mars 1834. On a de lui : *Propriétés de quelques points remarquables du triangle rectiligne et de plusieurs lignes et figures qu'ils déterminent* (en allemand) (**); Nuremberg, 1822. *Plan de recherches analytiques sur la pyramide triangulaire; ib.*, 1827 (en allemand) (POGGENDORF, *Handwörterbuch*).

(*) Ce volume est celui d'un cône dont le sommet est l'origine et dont la base est la partie de la surface podaire qui correspond à une partie donnée de la surface primitive.

(**) Nous devons la connaissance de cet ouvrage à M. Paul Serret. M. Mention avait bien voulu nous signaler également l'erreur historique commise à ce sujet par plusieurs géomètres et par nous-même (p. 240).

WOEPCKE (F.). — *Passages relatifs à des sommations de séries de cubes extraits de manuscrits arabes inédits.* In-4 de 40 pages. Rome, 1863.

Recherches entreprises à la demande du prince Boncompagni et d'où résulte que la formule qui donne la somme des cubes des nombres naturels se trouve dans Ibn-Albannâ, mathématicien marocain du XIIIe siècle.

CANTOR (Maurice). — Mathematische Beiträge... *Documents mathématiques relatifs à l'histoire de la civilisation des peuples.* In-8 de 432 pages. Halle, 1863.

Il sera rendu compte de cet ouvrage.

CHELINI (D.), professeur à Bologne. — Sulla teoria... *Sur la théorie des systèmes simples de coordonnées et sur la discussion de l'équation générale du second degré en coordonnées triangulaires et en coordonnées tétraédriques.* In-4 de 82 pages. Bologne, 1863. (Extrait des *Mémoires de l'Institut de Bologne.*)

Étude des systèmes de coordonnées dans les rapports qu'ils ont avec le principe de la résultante, c'est-à-dire de la droite ou de l'aire dont la projection sur une droite ou sur un plan est égale à la somme des projections analogues de droites ou d'aires planes données.

CHELINI. — Della Lege... *De la loi suivant laquelle un ellipsoïde hétérogène attire les divers points de l'espace.* In-4 de 52 pages. Bologne, 1862. (Extrait des *Mémoires de l'Institut de Bologne.*)

HOUEL (J.), professeur à la Faculté de Bordeaux. — *Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire.* In-8 de 142 pages. Greifswald, 1863. (Extrait des *Archives de Grunert.*)

Nicolaïdès (N.). — *Théorie du mouvement d'une figure plane dans son plan; application aux organes des machines*. In-8 de 32 pages et 1 planche. Paris, Leiber. — *Analyse du Mémoire précédent* par M. *Moigno*. (extrait des *Mondes*), suivie d'une *Note* par M. *Nicolaïdès*. In-8 de 16 pages et 1 planche.

Dans la Note, M. Nicolaïdès démontre, comme des conséquences de sa théorie, les théorèmes énoncés par M. Haton. (*Voir* p. 547.)

Salmon. — Treatise... *Traité des sections coniques, faisant connaître les plus importantes méthodes modernes, analytiques ou géométriques*. 4e édit. In-8. Londres; Longman, 1863.

Il sera rendu compte de cette nouvelle édition ainsi que de l'ouvrage du même auteur sur la géométrie à trois dimensions.

De Jonquières. — *Étude sur les courbes algébriques tracées sur une surface algébrique de degré quelconque*. In-4 de 18 pages. Rome, 1863. (Extrait des *Annali*.)

Ce Mémoire a pour but de remplir le programme tracé par M. Chasles dans un de ses Mémoires : « On est donc induit à penser que la manière d'étudier les courbes à double courbure devrait être telle, qu'elle devînt, comme cas particulier, celle en usage pour les courbes planes. Il semble qu'on pourra satisfaire à cette condition si, au lieu de considérer les courbes gauches dans l'espace indéfini, on les étudie par familles, sur telle ou telle surface déterminée : la surface plane ne sera plus qu'un cas particulier de la question, et les procédés employés sur les surfaces courbes deviendront ceux que les géomètres pratiquent sur le plan.... »

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME II, 2e SÉRIE.)

Analyse.

Pages.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Trigonométrie plane.

Mécanique.

Histoire et Biographie.

Pages.

Analyses et Comptes rendus.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME II, 2e SÉRIE.)

Note. — Sur 150 collaborateurs dont les travaux ont été insérés ou mentionnés, il y a 60 élèves dont 17 ont été admis à l'École Polytechnique, 5 à l'École Normale et 1 à l'École Navale.

(*) Pseudonyme.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les cinq derniers volumes de la première série et dans les deux premiers de la deuxième.

TOME XVI (*), 1re série.

Nos.	Pages.
360	58
362	59
378 à 381	180
383	182
385	183
398 à 400	390

TOME XVII.

Nos.	Pages.
414	31
419	32
424	33
429 et 430	139
434	186
437	186
439	187
441	187
444 et 445	262
447 et 448	358
454	434

TOME XVIII.

Nos.	Pages.
473	170
475	172
480 et 482	266
486 et 487	357
489	358
490 et 491	443
495 et 496	444

TOME XIX.

Nos.	Pages.
501	44
505 et 506	44
511 à 513	46
525 et 526	234
528 et 529	247
533	248
536	306

TOME XIX (suite).

Nos.	Pages.
538 et 539	306
540 et 541	381
546 et 547	404
549 et 550	405
552	406
554	464
556	464

TOME XX.

Nos.	Pages.
558 et 559	55
561 à 564	56
573	112
578	138
581	139
585	140
589 à 591	140
592 et 593	216
598 et 600 (**)	399

TOME Ier, 2e série.

Nos.	Pages.
604 à 607	24
613 et 615	155
617 à 619	156
625	382
631	383

TOME II.

Nos.	Pages.
643	93
648 à 651	189
656	274
657	335
662 et 663	336
664 à 667	371
668 à 670	421
672 à 676	479
677 à 681	522
682 et 683	550

(*) Nous reviendrons sur les questions non résolues dans les quinze premiers volumes. Pour les suivants, nous sommes redevables de plusieurs corrections à M. le Professeur Bellavitis.

(**) Les questions 596, 597 et 599 font double emploi avec les questions 589, 590 et 591.

